Th.S NGUYỄN KIẾM - Th.S LÊ THỊ HƯƠNG - Th.S HỒ XUÂN THẮNG

Phân loại và phương pháp giải các dạng bài tập Toán

(Chương trình nâng cao)

11

* Tóm tắt lí thuyết * Phân loại và phương pháp giải các dạng toán cơ bản và nâng cao
* Bài tập mẫu * Bài tập áp dụng
* Dành cho HS ban Khoa học tự nhiên và ban Cơ bản

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Th.S NGUYỄN KIẾM - Th.S LÊ THỊ HƯƠNG - Th.S HỒ XUÂN THẮNG

Phân loại và phương pháp giải các dạng bài tập Toán

(Chương trình nâng cao)

11

* Tóm tắt lí thuyết * Phân loại và phương pháp giải các dạng toán cơ bản và nâng cao
* Bài tập mẫu * Bài tập áp dụng
*** Dành cho HS ban Khoa học tự nhiên và ban Cơ bản**

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
ĐT (04) 9715013; (04) 7685236. Fax: (04) 9714899
***

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập NGUYỄN BÁ THÀNH

Biên tập nội dung
MINH HẢI
Sửa bản in
HOÀNG VĨNH
Trình bày bìa
SƠN KỲ

PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP TOÁN (chương trình nâng cao - tập 2)
Mã số: 1L - 175ĐH2007
In 2.000 cuốn, khổ 16 × 24 cm tại Công ti cổ phần Văn hoá Tân Bình.
Số xuất bản: 619- 2007/CXB/16 - 77/ĐHQG HN, ngày 3/08/2007..
Quyết định xuất bản số: 406/LK/XB
In xong và nộp lưu chiểu quí III năm 2007

LỜI GIỚI THIỆU

Xin giới thiệu đến bạn đọc cuốn: *Phân loại & Phương pháp giải các dạng bài tập Toán 11*, theo chương trình phân ban mới của bộ GD&ĐT.

Sách gồm 2 tập: - Tập 1: Đại số & giải tích

- Tập 2: Hình học

Nội dung sách bám sát theo sách giáo khoa mới, chương trình chuẩn và chương trình nâng cao. Nội dung mỗi bài gồm các phần sau:

A. Kiến thức cơ bản

B. Phân loại và phương pháp giải các dạng toán

- Bài tập tự luận
- Bài tập trắc nghiệm khách quan

Các bài tập trình bày trong các tập sách này được các tác giả chọn lọc kĩ lưỡng, có tính điển hình và khai thác tốt các góc cạnh của mỗi phần kiến thức. Với các lời giải rõ ràng, dễ hiểu sẽ giúp các em học sinh tiếp cận và rèn luyện tốt các kĩ năng và phương pháp giải toán, đồng thời ôn tập các kiến thức đã được học qua các bài tập trắc nghiệm khách quan để chuẩn bị tốt cho các kì thi học kì, thi tốt nghiệp, tuyển sinh bằng phương pháp trắc nghiệm khách quan theo quy định của bộ GD&ĐT.

Hi vọng rằng các tập sách này sẽ là người bạn đồng hành giúp các em học sinh ngày càng yêu thích hơn môn Toán và vững vàng giải quyết các vấn đề trước các kì thi sắp đến.

Do thời gian biên soạn có hạn, có thể sách còn những khiếm khuyết. Rất mong nhận được những góp ý, đóng góp của quý đồng nghiệp và các em học sinh để trong lần tái bản sau, bộ sách sẽ hoàn chỉnh hơn.

Mọi góp ý xin gởi về: Trung tâm sách Giáo dục Alpha - 225C Nguyễn Tri Phương - Phường 9 - Q.5 - Tp.HCM. ĐT: 8107718 - 8547464.

Email: alphabookcenter@yahoo.com

Các tác giả

MỤC LỤC

Trang

Chương 1: Các phép biến hình trong mặt phẳng 5

§1. Phép biến hình – Phép tịnh tiến – Phép dời hình 5

§2. Phép đối xứng trục 14

§3. Phép quay và phép đối xứng tâm 25

§4. Phép vị tự 40

§5. Phép đồng dạng 56

§6. Hình bằng nhau – Hình đồng dạng 64

ÔN TẬP CHƯƠNG I 68

Chương II: Đường thẳng và mặt phẳng trong không gian. Quan hệ song song 74

§1. Đại cương về đường thẳng và mặt phẳng 74

§2. Hai đường thẳng song song 81

§3. Đường thẳng song song với mặt phẳng 84

§4. Hai mặt phẳng song song 87

ÔN TẬP CHƯƠNG II 93

Chương III: Véc tơ trong không gian. Quan hệ vuông góc trong không gian 95

§1. Vectơ trong không gian. Sự đồng phẳng của các véctơ 95

§2. Hai đường thẳng vuông góc 109

§3. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng 117

§4. Hai mặt phẳng vuông góc 127

§5. Khoảng cách 139

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ 154

CHƯƠNG I: CÁC PHÉP BIẾN HÌNH TRONG MẶT PHẲNG

§1. PHÉP BIẾN HÌNH – PHÉP TỊNH TIẾN – PHÉP DỜI HÌNH

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. Phép biến hình

1. Định nghĩa: Phép biến hình là một quy tắc để mỗi điểm M trong mặt phẳng xác định được một điểm duy nhất M' của mặt phẳng đó.

2. Kí hiệu và thuật ngữ: Gọi **P** là tập hợp tất cả các điểm trong mặt phẳng và một phép biến hình f : **P** → **P**

$$M \mapsto M' = f(M)$$

- Điểm M' gọi là ảnh của điểm M trong phép biến hình f

- Nếu H là một hình nào đó thì H' (gồm các điểm M' là ảnh của điểm M∈H) được gọi là ảnh của H qua phép biến hình f và viết f(H) = H'.

3. Tích của hai phép biến hình: Cho hai phép biến hình f và g. Gọi M là điểm bất kì trong mặt phẳng, M' là ảnh của M qua f, M'' là ảnh của M' qua g. Ta nói M'' là ảnh của M trong tích của hai phép biến hình f và g, kí hiệu $g \circ f$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, mapsto] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & M' \arrow[r, mapsto, "g"] & M'' \end{tikzcd}$$

II. Phép tịnh tiến

1. Định nghĩa: Phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{u}$ là một phép biến hình biến điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. Kí hiệu: T hoặc $T_{\vec{u}}$.

2. Phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{0}$ còn gọi là phép đồng nhất, thường được kí hiệu id.

id: **P** → **P**

$$M \mapsto id(M) = M$$

3. Các tính chất của phép tịnh tiến:

Định lí 1: Nếu phép tịnh tiến biến hai điểm M và N thành hai điểm M' và N' thì $M'N' = MN$

Định lí 2: Phép tịnh tiến biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng, ba điểm không thẳng hàng thành ba điểm không thẳng hàng.

Hệ quả: Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng, tia thành tia, đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, tam giác thành tam giác bằng nó, đường tròn thành đường tròn bằng nó, góc thành góc bằng nó.

III. Phép dời hình.

1. Định nghĩa: Phép dời hình là phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

2. Định lí: Phép dời hình biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng, đường thẳng thành đường thẳng, tia thành tia, đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, tam giác thành tam giác bằng nó, đường tròn thành đường tròn bằng nó, góc thành góc bằng nó.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tìm ảnh của một hình H cho trước qua một phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$

Phương pháp: 1. Lấy một điểm M tuỳ ý trên H

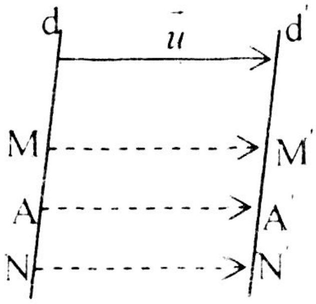
2. Dựng ảnh M' của M qua $T_{\vec{u}} : \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

3. Tìm tập hợp các điểm M'.

Bài 1. Tìm ảnh của đường thẳng d (cho trước) qua phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{u} \neq \vec{0}$

a) d không cùng phương với véc tơ $\vec{u}$.

b) d cùng phương với véc tơ $\vec{u}$.



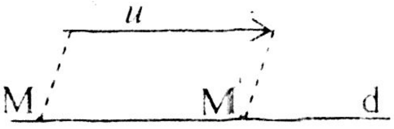
Giải

a) d không cùng phương với véc tơ $\vec{u}$.

***** Lấy điểm M∈d và $M' = T_{\vec{u}}(M)$ thì $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

Lấy điểm cố định A ∈d thì $A' = T_{\vec{u}}(A)$ cố định và $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$ nên $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$, suy ra tứ giác AMM'A' là **hình bình hành** ⇒ AM // A'M'. Do đó $M' \in d'$, đường thẳng d' đi qua điểm A' **và** song song với đường thẳng d.

***** Lấy điểm $N' \in d'$ và gọi N∈d sao cho NN' // AA' và NN' = AA' nên $ANN'A'$ là hình bình hành. Suy ra: $\overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{AA'} = \vec{u} \Rightarrow N' = T_{\vec{u}}(N)$. Vậy $d' = T_{\vec{u}}(d)$.



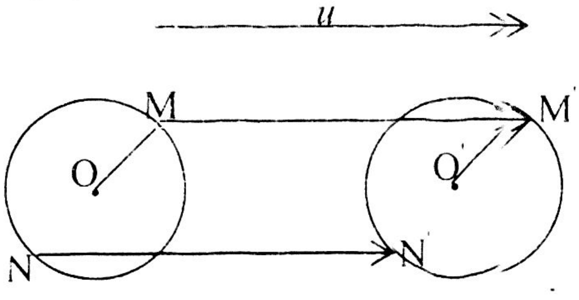
b) d cùng phương với véc tơ $\vec{u}$.

∀M∈d và $M' = T_{\vec{u}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow M' \in d$

Suy ra: $d' = T_{\vec{u}}(d) \equiv d$.

Bài 2. Tìm ảnh của đường tròn (O; R) qua phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{u} \neq \vec{0}$

Giải



***** Ta có: $O' = T_{\vec{u}}(O) \Rightarrow \overrightarrow{OO'} = \vec{u}$

Lấy M ∈(O; R) thì $M' = T_{\vec{u}}(M)$ và $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

Suy ra: $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{MM'} \Rightarrow \overrightarrow{O'M'} = \overrightarrow{OM}$

$\Rightarrow O'M' = OM = R$ nên M' thuộc đường **tròn** (O'; R).

* Lấy N' $\in$(O'; R) và gọi N$\in$(O; R) sao cho NN' // OO' và NN' = OO' thì tứ giác OO'N'N là hình bình hành nên $\overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{OO'} = \vec{u} \Rightarrow N' = T_{\vec{u}}(N)$.

Vậy, ảnh của đường tròn (O; R) qua phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ là đường tròn (O'; R) sao cho $\overrightarrow{OO'} = \vec{u}$.

Nhận xét 1: Phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ với véc tơ $\vec{u} \neq \vec{0}$:

1. Nếu đường thẳng d không cùng phương với véc tơ $\vec{u}$ thì ảnh của đường thẳng d là đường thẳng d' song song với đường thẳng d.
2. Nếu đường thẳng d cùng phương với véc tơ $\vec{u}$ thì ảnh của đường thẳng d là đường thẳng d.
3. Ảnh của đường tròn (O; R) là đường tròn (O'; R) ; hai đường tròn này bằng nhau và $\overrightarrow{OO'} = \vec{u}$.

Dạng 2. Xác định phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$

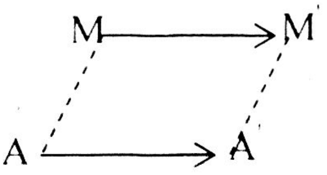
Phương pháp: 1. Xác định phép biến hình f.

2. f biến điểm cố định A $\to$ A' ; M (bất kì) $\to$ M'.

3. $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM} \Rightarrow T_{\vec{u}} = T_{\overrightarrow{AA'}}$

Bài 3. Cho phép biến hình biến điểm A (cố định) và điểm M (bất kì) thành A' và M'. Chứng minh phép biến hình trên là phép tịnh tiến khi và chỉ khi $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}$.

Giải



* Xét phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ với véc tơ $\vec{u} \neq \vec{0}$

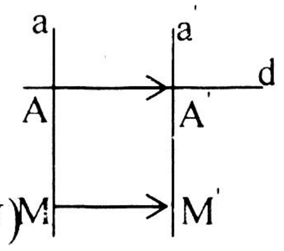
$$T_{\vec{u}} :: \begin{cases} A \mapsto A' \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \vec{u} \\ M \mapsto M' \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MM'} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'} \end{cases}$$

* Một phép biến hình biến điểm A$\to$ A', M $\to$ M' thoả mãn $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}$.

Suy ra $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MM'}$. Do A cố định nên $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$ cố định. Vậy một phép biến hình biến điểm M $\to$ M' và $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ nên phép biến hình đó là một phép tịnh tiến.

Bài 4. Cho hai đường thẳng song song a và a'. Tìm tất cả các phép tịnh tiến biến a thành a'.

Giải



Gọi d là đường thẳng bất kì, không song song với a và cắt a, a' tại A và A'. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$ thì véc tơ $\vec{u} \neq \vec{0}$

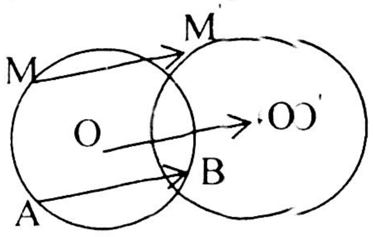
Lấy M$\in$a và M'$\in$a' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'} = \vec{u} \Rightarrow M' = T_{\vec{u}}(M)$

Suy ra: $a' = T_{\vec{u}}(a)$. Vậy, phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ với $\vec{u} = \overrightarrow{AA'}$ biến đường thẳng a thành a'.

Dạng 3. Tìm quỹ tích (tập hợp điểm) bằng phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$

Phương pháp: 1. Xác định phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ biến điểm M → M'.
2. Tìm quỹ tích điểm M.
3. Từ quỹ tích của điểm M, dựa vào tính chất của phép tịnh tiến để suy ra quỹ tích của điểm M'.

Bài 5. Trên đường tròn (O) cho hai điểm cố định A, B và một điểm M thay đổi. Tìm quỹ tích điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$.



Giải

Gọi O, R lần lượt là tâm, bán kính của đuơng tròn (O)

Ta có: $\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB}$

Xét phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{AB}}$: M → M'.

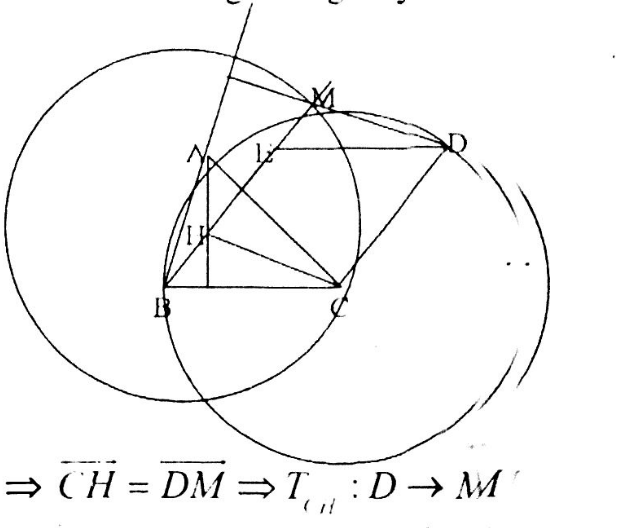
Điểm M chạy trên đường tròn (O) thì điểm M' vạch đường tròn (O', R) là ảnh của (O) qua phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{AB}}$.

* Vẽ đường tròn (O', R): Vẽ tâm O' sao cho $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AB}$

Đường tròn (O', R) có tâm O' và bán kính R.

Quỹ tích điểm M' là đường tròn (O', R).

Bài 6. Cho tam giác ABC cố định có trục tâm H. Vẽ hình thoi BCDE, từ D và E vẽ các đường thẳng vuông góc với AB và AC. Các đường thẳng này cắt nhau tại điểm M. Tìm quỹ tích của điểm M.



Giải

Tứ giác BCDE là hình thoi nên BC = CD, BC//ED. H là trực tâm của ΔABC nên BH ⊥ AC, ME ⊥ AC

⇒ BH // ME. Suy ra: $\widehat{HBC} = \widehat{MED}$

(Góc có cạnh tương ứng song song)

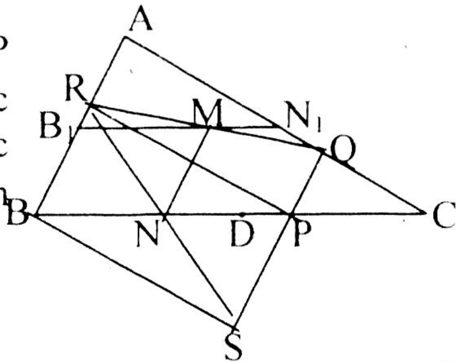
Tương tự: HC // DM và BC//ED

⇒ $\widehat{HCB} = \widehat{MDE}$

Suy ra: ΔHBC = ΔMDE (góc -cạnh -góc) $\Rightarrow \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{DM} \Rightarrow T_{\overrightarrow{CH}} : D \to M$

Ta có: BC = CD nên điểm D chạy trên đường tròn (C), tâm C, bán kính R =BC, suy ra điểm M thuộc đường tròn (H), tâm H, bán kính R =BC là ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{CH}}$.

Bài i 7. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^0$. Từ điểm P thayy đổi trên cạnh huyền BC của ΔABC vẽ các đườờng vuông góc PR, PQ với các cạnh góc vuôờng AB, AC (R∈AB, Q∈AC). Tìm quỹ tích trunng điểm M của đoạn thẳng RQ.



Giải

DDựng hình chữ nhật ABSQ. Ta có: PR⊥AB, PQ⊥AC và RA⊥AQ ⇒ ARPQ làà hình chữ nhật suy ra RBSP cũng là hình chữ nhật. Gọi N là trung điểm cạạnh BP thì MN//SQ và MN=$\frac{1}{2}$SQ ⇒ MN// BA và MN=$\frac{1}{2}$ BA.

ĐĐặt $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \Rightarrow \overrightarrow{NM} = \vec{u}$. Phép tịnh tiến $T_{\vec{u}} : N \to M$. Khi P≡ C thì N ≡ D làà trung điểm cạnh BC nên khi P thay đổi trên cạnh huyền BC thì N cũng thhay đổi trên đoạn thẳng BD thuộc cạnh huyền BC.

$T_{\vec{u}} : B \to B_1$ và $T_{\vec{u}} : D \to N_1$ thì B_1 và N_1 là trung điểm cạnh AB, AC

SSuy ra quỹ tích của điểm M là đoạn thẳng B_1N_1

Dạụng 4. Áp dụng phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ vào dựng hình

PPhương pháp:

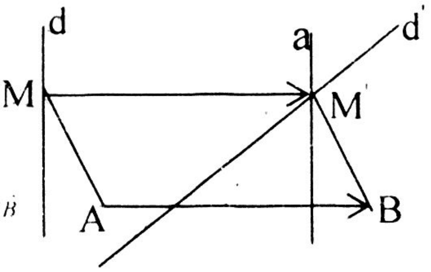
1. QQuy bài toán dựng hình về bài toán dựng điểm M nào đó phụ thuộc vào hai đđiều kkiện độc lập (α) và (β).
2. XXác định phép tịnh tiến để tìm điều kiện (α) gọi là H_α và điều kiện (β) gọi là H_β.
3. ĐĐiểm $M \in H_\alpha \cap H_\beta$.

Bài i 8. Cho đoạn thẳng AB cố định và hai đường thẳng cắt nhau d và d'. Tìm đđiểm M ∈d và điểm M' ∈d' sao cho tứ giác ABM'M là hình bình hành.

Giải

Phhân tích: Giả sử dựng được điểm M ∈d, M' ∈d' thỏoa mãn tứ giác ABM'M là hình bình hành nên

$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow T_{\overrightarrow{AB}} : M \to M'$.



M∈∈d ⇒ M' ∈a, a là ảnh của d qua phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{AB}}$

Mặặt khác M' ∈d' nên M' = a ∩ d'

Khhi đó $T_{\overrightarrow{BA}} : M' \to M$.

Cáách dựng:

–- Dựng đường thẳng a là ảnh của đường thẳng d qua phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{AB}}$

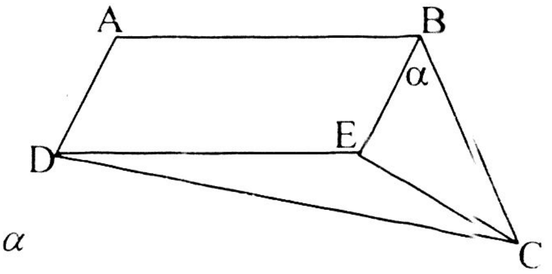
–- Điểm M' = a ∩ d'

– Dựng điểm M là ảnh của M' qua phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{BA}}$

Chứng minh: Ta có đường thẳng d cắt đường thẳng d' nên đường thẳng a cắt đường thẳng d' và $\overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{BA}$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng d và a bằng AB nên M∈d.

Biện luận: Theo cách dựng, bài toán luôn có một nghiệm hình.

Bài 9. Dựng một tứ giác lồi ABCD, biết các cạnh AB= a, BC = b, CD = c, AD =d và góc giữa AD và BC bằng α.



Giải

Phân tích: Giả sử dựng được tứ giác lồi ABCD thoả mãn yêu cầu bài toán. Khi đó, xét phép tịnh tiến

$T_{\overrightarrow{AB}} : D \to E \Rightarrow BE = AD = d$ và $\widehat{EBC} = \alpha$

Ta có BC = b nên ΔBEC dựng được, suy ra ΔDEC dựng được. Từ đó, A là giao của hai đường tròn (D, R=d) và (B, r = a).

Cách dựng:

- Dựng ΔBEC khi biết BC = b, BE = d và góc xen giữa $\widehat{EBC} = \alpha$.
- Dựng ΔDEC khi biết ba cạnh DE = a, CD = c và EC = $\sqrt{d^2+b^2-2bd\cos\alpha}$.
- Dựng đường tròn (D, R=d) có tâm D và bán kính R = d.
- Dựng đường tròn (B, r = a) có tâm B và bán kính r = a.
- Điểm A là giao của hai đường tròn (D, R=d) và (B, r = a).

Chứng minh: Theo cách dựng tứ giác lồi ABCD có các cạnh AB= a, BC = b, CD = c, AD =d và góc giữa AD và BC bằng α.

Biện luận:

* Khi $|DC - DE| \le EC \le DC + DE \Leftrightarrow |a-c| \le \sqrt{d^2+b^2-2bd\cos\alpha} \le a+c\,(1)$ và hai đường tròn (D, R=d) và (B, r = a) cắt nhau thì bài toán có một nghiệm hình

(vì tứ giác ABCD lồi nên chỉ chọn một giao điểm là đỉnh A).

* Khi điều kiện (1) không thoả mãn hoặc hai đường tròn (D, R=d) và (B, r = a) không cắt nhau thì bài toán vô nghiệm.

Dạng 5. Chứng minh hai hình bằng nhau; tính độ dài đoạn thẳng, độ lớn góc

Phương pháp:

1. Xác định phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{XY}}$.
2. Áp dụng tính chất của phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{XY}} : M \to M' \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{XY}$

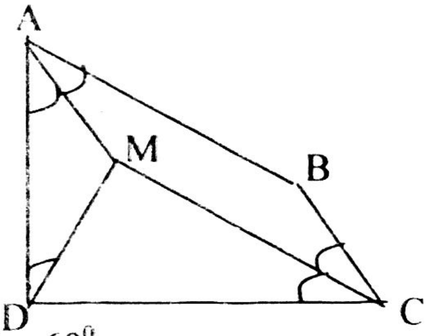
   – Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó; góc thành góc bằng nó;

   – Biến tam giác thành tam giác bằng nó; đường tròn thành đường tròn bằng nó.

3. Áp dụng các hệ thức lượng trong tam giác.

Bài 9. Cho tứ giác ABCD có AB = $6\sqrt{3}$ cm, CD = 12cm, $\widehat{A} = 60^0$, $\widehat{B} = 150^0$, $\widehat{D} = 90^0$. Tính độ dài các cạnh BC và AD.

Giải



Xét phép tịnh tiến $T_{BC} : A \to M \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$

Suy ra: Tứ giác ABCM là hình bình hành

$\Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{BAM} = 180^0$

$\Rightarrow \widehat{BAM} = 180^0 - \widehat{ABC} = 180^0 - 150^0 = 30^0$

$\widehat{BCM} = \widehat{BAM} = 30^0$ và $MC = AB = 6\sqrt{3}$

Trong tứ giác ABCD thì

$\widehat{C} = 360^0 - (\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{D}) = 360^0 - (60^0 + 150^0 + 90^0) = 60^0$.

Suy ra: $\widehat{MCD} = \widehat{C} - \widehat{BCM} = 60^0 - 30^0 = 30^0$. Áp dụng định lí cosin trong ΔDMC:

$MD^2 = MC^2 + DC^2 - 2MC.DC\cos 30^0 = 36 \Rightarrow MD = 6.$

Mặt khác: $MD^2 + MC^2 = 36 + 108 = 144$ và $CD^2 = 144$

$\Rightarrow CD^2 = MC^2 + MD^2$

Suy ra: ΔDMC vuông tại M nên $\widehat{MDC} = 60^0$ và $\widehat{MDA} = \widehat{D} - \widehat{MDC} = 30^0$.

$\widehat{DAM} = \widehat{A} - \widehat{BAM} = 30^0$. Suy ra: ΔMAD cân tại M ⇒BC = MA = MD = 6cm

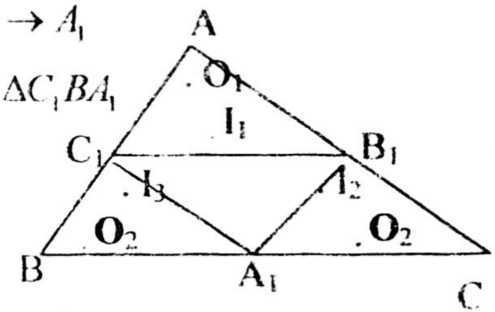
Áp dụng định lí cosin trong ΔADM:

$AD^2 = AM^2 + MD^2 - 2AM.MD\cos\widehat{AMD}$

$= 36 + 36 - 72\cos 120^0 = 108 \Rightarrow AD = 6\sqrt{3}\ cm.$

Bài 10. Cho tam giác ABC. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AC, AB và I_1, I_2, I_3; O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp các ΔAC_1B_1, ΔCA_1B_1, ΔBC_1A_1. Chứng minh $\Delta\, O_1O_2O_3 = \Delta\, I_1I_2I_3$.

Giải



Xét phép tịnh tiến $T_{AC} : A \to C_1 ; C_1 \to B ; B_1 \to A_1$

Suy ra: $T_{AC_1} : \Delta AC_1B_1 \to \Delta C_1BA_1 \Rightarrow \Delta AC_1B_1 = \Delta C_1BA_1$

Suy ra: $T_{AC_1} : O_1 \to O_3 ; I_1 \to I_3 \Rightarrow \overrightarrow{O_1O_3} = \overrightarrow{I_1I_3}$

Suy ra: $O_1O_3 = I_1I_3$ (i)

Xét phép tịnh tiến $T_{AB_1} : A \to B_1 ; B_1 \to C ; C_1 \to A_1$

$\Rightarrow T_{AB_1} : \Delta AB_1C_1 \to \Delta B_1CA_1 \Rightarrow \Delta AB_1C_1 = \Delta B_1CA_1$

$\Rightarrow T_{\overrightarrow{AB_1}}: O_1 \to O_2\,;\, I_1 \to I_2 \Rightarrow \overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{I_1I_2} \Rightarrow O_1O_2 = I_1I_2$ (2)

Xét phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{CA_1}}: C \to A_1\,;\, A_1 \to B\,;\, B_1 \to C_1 \Rightarrow T_{\overrightarrow{CA_1}}: \Delta CA_1B_1 \to \Delta A_1BC_1$

$\Rightarrow \Delta CA_1B_1 = \Delta A_1BC_1$ và $T_{\overrightarrow{CA_1}}: O_2 \to O_3\,;\, I_2 \to I_3 \Rightarrow \overrightarrow{O_2O_3} = \overrightarrow{I_2I_3} \Rightarrow O_2O_3 = I_2I_3$

(3)

Từ (1), (2) và (3) ta có: $\Delta\, O_1O_2O_3 = \Delta\, I_1I_2I_3$ (cạnh – cạnh – cạnh).

Dạng 6. Tích của các phép tịnh tiến

Phương pháp: Áp dụng tích của các phép biến hình:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & M' \arrow[r, mapsto, "g"] & M'' \end{tikzcd}$$

Bài 11. Cho hai phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ theo véc tơ $\vec{u}$ và $T_{\vec{v}}$ theo véc tơ $\vec{v}$. Với điểm bất kì M, $T_{\vec{u}}$ biến M thành M' và $T_{\vec{v}}$ biến M' thành M''. Chứng tỏ rằng phép biến hình biến điểm M thành điểm M'' là phép tịnh tiến .

Giải

$T_{\vec{u}}: M \to M' \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ và $T_{\vec{v}}: M' \to M'' \Rightarrow \overrightarrow{M'M''} = \vec{v}$.

Ta có: $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = \vec{u} + \vec{v}$ suy ra: $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{u}+\vec{v}}: M \to M''$ là một phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$

Dạng 7. Biểu thức giải tích của phép tịnh tiến

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho $\vec{u} = (a;b)$ với $\vec{u} \neq \vec{0}$ và điểm M(x ; y). Xét phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}: M \to M'(x';y')$ thì $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Ta có: $\overrightarrow{MM'} = \left(x' - x; y' - y\right)$. Suy ra: $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$ (1). Gọi công thức (1) là biểu thức giải tích của phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$.

Bài 12. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho đường thẳng d: $2x - y + 1 = 0$ và hai điểm A(1 ; – 2), B(5 ; 1). Xác định phương trình đường thẳng d' là ảnh của đường thẳng d qua phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{AB}}$.

Giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = \left(4;3\right)$ và biểu thức giải tích của phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{AB}}$ $\begin{cases} x' = x + 4 \\ y' = y' + 3 \end{cases}$

Lấy bất kì điểm M(x ; y) ∈d thì $2x-y+1=0$ (*)

$T_{AB}: M(x;y)\to M'(x';y') \Rightarrow T_{AB}: d\to d'$ và M' ∈d'

Từ $\begin{cases} x' = x+4 \\ y' = y+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x'-4 \\ y = y'-3 \end{cases}$. Thay vào (*) ta có: $2x'-y'-4=0$.

Phương trình của đường thẳng d' là: $2x-y-4=0$.

Bài 13. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho $\vec{u}=(2;3)$ và đường tròn (C): $x^2+(y-1)^2=4$. Xác định phương trình của đường tròn (C_1) là ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$.

Giải

Cách 1: Biểu thức giải tích của phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$: $\begin{cases} x' = x+2 \\ y' = y+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x'-2 \\ y = y'-3 \end{cases}$

$T_{\vec{u}}: M(x;y)\in (C)\to M'(x';y')\in (C_1) \Rightarrow T_{\vec{u}}(C):\to (C_1)$

Thay vào phương trình của (C), ta có: $(x'-2)^2+(y'-4)^2=4$.

Phương trình của đường tròn (C_1) là: $(x-2)^2+(y-4)^2=4$.

Cách 2: Tâm và bán kính của đường tròn (C) là I(0 ; 1), R = 4.

Gọi I_1 là ảnh của I qua phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ thì $I_1(2\ ;\ 4)$. Phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ biến đường tròn (C) thành đường tròn (C_1) và bằng nó nên phương trình của đường tròn (C_1) là: $(x-2)^2+(y-4)^2=4$.

BÀI TẬP.

Bài 1. Trong mặt phẳng P cho tam giác ABC. Chứng minh rằng tích của các phép tịnh tiến: $T_{AC}\circ T_{BA}\circ T_{CB}=id$ với $id: P\to P$

$M\mapsto id(M)=M$

Bài 2. Cho đường tròn cố định (O, R) và một dây cung cố định AB. M là điểm di động trên đường tròn (O, R). Tìm quỹ tích trực tâm H của tam giác MAB.

Bài 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn cố định tâm O bán kính R, H là trực tâm tam giác. Các đỉnh B và C cố định, đỉnh A di động trên đường tròn. D là điểm đối xứng với A qua tâm O và I là trung điểm của BC.

a) Tứ giác BHCD là hình gì? b) Tìm quỹ tích điểm H.

Bài 4. Cho tam giác ABC. Tìm điểm M trên cạnh AB và điểm N trên cạnh AC sao cho MN// BC và AM = CN.

Bài 5. Cho hình vuông ABCD có tâm O, có cạnh bằng a. Tìm điểm M trên cạnh AB và điểm N trên cạnh CD sao cho OM + MN + NB ngắn nhất. Biết rằng MN//BCAM = CN. Tính độ dài ngắn nhất đó theo a.

Bài 6. Cho điểm A và một đường thẳng cố định d. Dựng đường tròn tâm O, bán kính R cho trước cắt đường thẳng d theo một dây cung MN có độ dài bằng a.

Bài 7. Cho đường tròn (O) với đường kính AB cố định, một đường kính MN thay đổi. Các đường thẳng AM và AN cắt tiếp tuyến tại B lần lượt tại P và Q. Tìm quỹ tích trực tâm các tam giác MPQ và NPQ.

Bài 8. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O, R), AD = R. Dựng các hình bình hành DABM, DACN. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN nằm trên đường tròn (O, R).

Bài 9. Cho hình thang ABCD có các đường chéo AC = a, BD = b, cạnh đáy CD = c và góc giữa AC và BD bằng α. Tính cạnh đáy AB.

Bài 10. Cho tứ giác ABCD không phải là hình thang. Gọi M, N là trung điểm của AB và CD. Đường thẳng MN tạo với AD, BC những góc bằng nhau. Chứng minh AD = BC.

Bài 11. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho điểm A(−3 ; 3), B(1 ; 3) và đường tròn (C) tâm I(3 ; 1), bán kính R = 1. Đường thẳng d: x + y − 1 = 0. Tìm trên d một điểm M và trên (C) điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$.

Bài 12. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho điểm A(−3;3), B(−1; 6).

a) Tìm toạ độ điểm M' là ảnh của điểm M(4 ; −5) qua phép tịnh tiến T_{AB}.

b) Xác định phương trình tổng quát của đường thẳng d_1 là ảnh của đường thẳng d: $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -7 + 3t \end{cases}$ qua phép tịnh tiến T_{AB}.

c) Xác định phương trình của đường tròn (C_1) là ảnh của đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$ qua phép tịnh tiến T_{AB}.

§2. PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

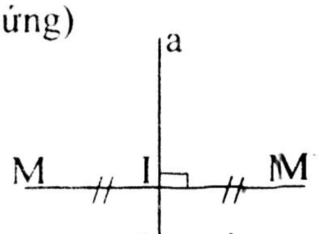
1. Định nghĩa: Phép đối xứng qua một đường thẳng là một phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' đối xứng với M qua đường thẳng đó.

Kí hiệu: $Đ_a$ (Đường thẳng a gọi là trục đối xứng)

Phép đối xứng trục $Đ_a$: M → M'

* Nếu $M \in a$ thì $M' \equiv M$ và gọi M là điểm kép

* Nếu $M \notin a$ thì a là trung trực đoạn thẳng MM'



2. Định lí: Phép đối xứng trục là một phép dời hình

* Phép đối xứng trục biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng, đường thẳng thành đường thẳng, tia thành tia, đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, tam giác thành tam giác bằng nó, đường tròn thành đường tròn bằng nó, góc thành góc bằng nó.

* Đường thẳng d được gọi là trục đối xứng của hình H nếu phép đối xứng trục $Đ_d$ biến hình H thành chính nó.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Giá trị lớn nhất – Giá trị nhỏ nhất

Phương pháp: 1. Xác định phép đối xứng trục $Đ_a$: M → M'.

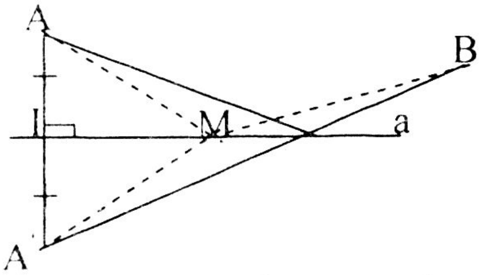
2. ∀ I∈a thì IM = IM'.

3. Áp dụng bất đẳng thức: Với ba điểm bất kì A, B, C ta có

$$AB + BC \geq AC.$$

Bài 1. Cho đường thẳng a và hai điểm A và B nằm cùng phía đối với a. Tìm trên đường thẳng a điểm M sao cho MA + MB ngắn nhất.

Giải



Xét phép đối xứng trục $Đ_a$: A → A'

∀ M∈a thì MA = MA'

MA + MB = MA' + MB ≥ A'B.

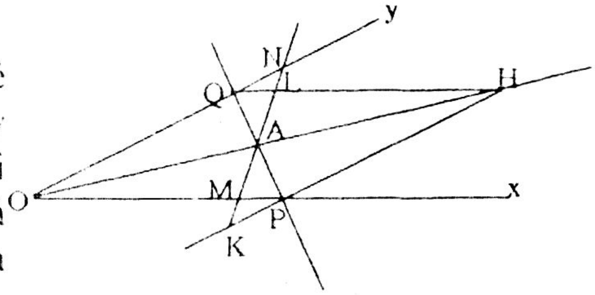
Để MA + MB ngắn nhất thì chọn M sao cho ba điểm A', M, B thẳng hàng. Vậy M là giao điểm của hai đường thẳng a và A'B.

Bài 2. Cho góc nhọn xOy và một điểm A nằm trong góc đó. Qua A dựng đường thẳng d cắt Ox tại P và cắt Oy tại Q sao cho A là trung điểm của PQ.

a) Chứng minh rằng tam giác OPQ có diện tích lớn nhất.

b) Xác định điểm B trên Ox và C trên Oy sao cho tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất.

Giải

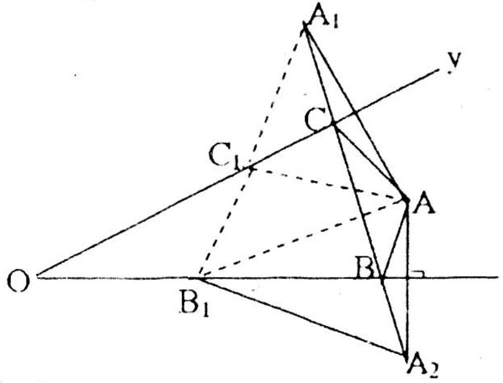


a) Gọi H đối xứng với O qua A. Qua H kẻ đường thẳng song song với Ox, cắt Oy tại Q và đường thẳng song song với Oy, cắt Ox tại P thì tứ giác OPHQ là hình bình hành nên A là trung điểm của PQ.

Vẽ một đường thẳng bất kì qua A cắt Ox, Oy, HQ, HP lần lượt tại M, N, L, K.

Ta có: dtΔOMN + dtΔHLK > dt OPHQ ⇒ 2dtΔOMN > 2dtΔOPQ

⇒ dtΔOMN > dtΔOPQ. Vậy diện tích tam giác OPQ nhỏ nhất.



b) Gọi A_1, A_2 lần lượt là đối xứng của điểm A qua Oy, Ox. Gọi B, C lần lượt là giao điểm của đường thẳng A_1A_2 với Ox, Oy. Ta có chu vi tam giác ABC là:

$$AB + BC + AC = BA_2 + Bc + CA_1 = A_1A_2$$

Lấy bất kì $C_1 \in Oy$, $B_1 \in Ox$

ta có chu vi tam giác AB_1C_1 là:

$$AB_1 + B_1C_1 + AC_1 = B_1A_2 + B_1C_1 + C_1A_1 \geq A_1A_2.$$

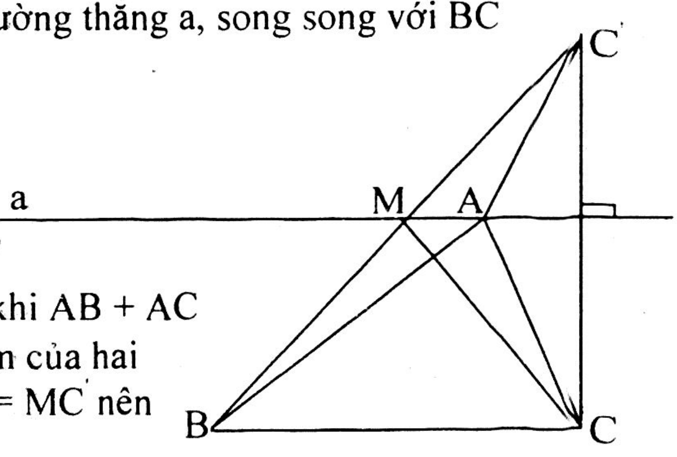
Suy ra, chu vi tam giác ABC nhỏ nhất.

Bài 3. Trong tất cả các tam giác có cùng diện tích và có chung một cạnh. Chứng minh rằng tam giác cân có chu vi nhỏ nhất.

Giải

Gọi BC = b là cạnh chung của các tam giác ABC. Gọi diện tích của tam giác là S thì đỉnh A nằm trên đường thẳng a, song song với BC và cách BC một khoảng $h = \frac{2S}{b}$

Xét phép đối xứng Đ$_a$: C → C$'$

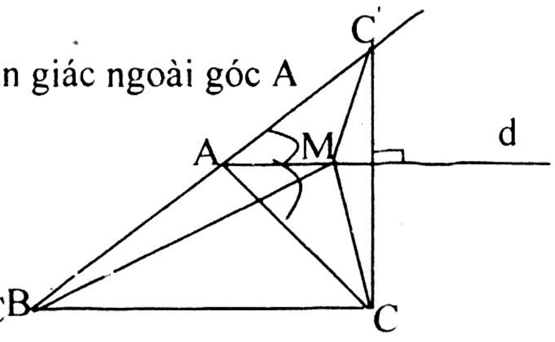


Ta có: AB + AC = AB + AC$'$ ≥ BC$'$

Tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất khi AB + AC nhỏ nhất. Suy ra A ≡ M là giao điểm của hai đường thẳng BC$'$ và a. Suy ra: MB = MC$'$ nên tam giác BMC cân tại M.

Bài 4. Cho tam giác ABC. Gọi d là đường phân giác ngoài tại đỉnh A của tam giác ABC và M là một điểm bất kì thuộc d. Chứng minh tam giác MBC có chu vi không nhỏ hơn chu vi tam giác ABC.

Giải



Xét phép đối xứng Đ$_d$: C → C$'$ và d là phân giác ngoài góc A nên A nằm giữa hai điểm B và C$'$.

∀ M∈d thì MC = MC'

và MC + MB = MC$'$ + MB ≥ BC$'$

BC$'$ = BA + AC$'$ = AB + AC

Suy ra: MB + MC + BC ≥ AB + AC + BC

Vậy, chu vi tam giác ABC nhỏ nhất.

Dạng 2. Tìm quỹ tích (Tập hợp điểm) bằng phép đối xứng Đ$_a$

Phương pháp: 1. Xác định phép đối xứng Đ$_a$ biến điểm M → M'.
2. Tìm quỹ tích điểm M.
3. Từ quỹ tích của điểm M, dựa vào tính chất của phép đối xứng để suy ra quỹ tích của điểm M'.

Bài 5. Cho đường tròn (O, R) và hai điểm A, B thuộc đường tròn. Đường tròn (I, r) tiếp xúc ngoài với đường tròn (O, R) tại A. Một điểm M di động trên đường tròn (O, R), tia MA cắt đường tròn (I, r) tại điểm thứ hai C. Qua C vẽ đường thẳng song song với AB cắt đường thẳng MB tại D. Tìm quỹ tích của điểm D.

Giải

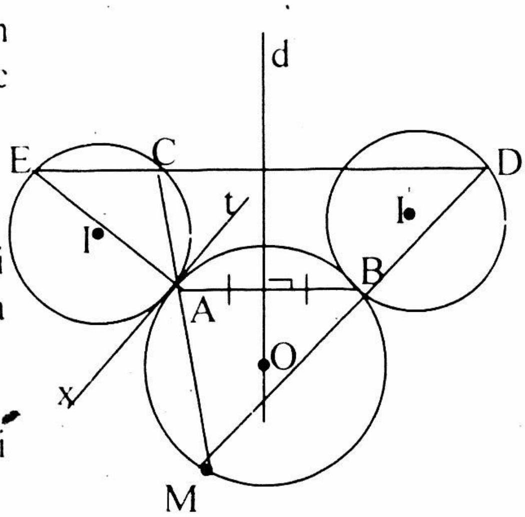
Gọi E là giao điểm của CD với đường tròn (I, r). Vẽ tiếp tuyến chung của (O, R) và (I, r) là xt.

Ta có: $\widehat{ABM} = \widehat{xAM}$, $\widehat{CEA} = \widehat{tAC}$ và $\widehat{xAM} = \widehat{tAC}$

$\widehat{ABM} = \widehat{EDB}$ (do CD // AB)

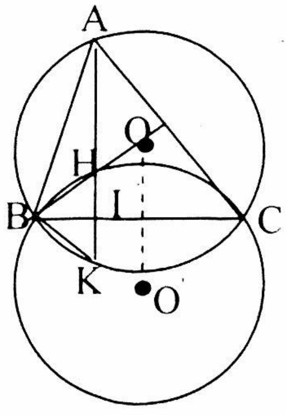
$\Rightarrow \widehat{CEA} = \widehat{EDB}$ nên tứ giác ABDE là hình thang cân. Gọi d là đường trung trực đoạn thẳng AB thì d cũng là đường trung trực đoạn thẳng ED.

Phép đối xứng Đ$_d$: E → D.



Khi M di động trên đường tròn (O, R) thì E di động trên đường tròn (I, r) nên quỹ tích của điểm D là đường tròn (I', r) ảnh của đường tròn (I, r) qua phép đối xứng Đ$_d$ Do đường tròn (I, r) tiếp xúc với đường tròn (O, R) tại A nên đường tròn (I', r) tiếp xúc với đường tròn (O, R) tại B.

Bài 6. Cho đường tròn (O) có dây cung BC cố định và điểm A di động trên đường tròn (O). Tìm quỹ tích trực tâm H của tam giác ABC.



Giải

Ta có: $\widehat{HAC} = \widehat{CBH}$ (Góc có cạnh tương ứng vuông góc)

$\widehat{HAC} = \widehat{KBC}$ (Cùng chắn cung $\overset{\frown}{KC}$)

Suy ra: $\widehat{CBH} = \widehat{CBK}$ nên BC là phân giác góc $\widehat{KBH}$.

Mặt khác: AI ⊥ BC, suy ra: ΔBHK cân tại B ⇒ HI = IK.

Xét phép đối xứng trục BC là Đ$_{BC}$: K → H.

Khi A chạy trên đường tròn (O) thì K cũng chạy trên đường tròn (O).

Nên quỹ tích của điểm H là đường tròn (O), ảnh của đường tròn (O) qua phép đối xứng trục BC.

Dạng 3. Áp dụng phép đối xứng trục vào dựng hình

Phương pháp:

1. Quy bài toán dựng hình về bài toán dựng điểm M nào đó phụ thuộc vào hai điều kiện độc lập (α) và (β).
2. Xác định phép đối xứng trục, tìm điều kiện (α), (β) gọi là H_α, H_β.
3. Điểm M là giao của H_α và H_β.

Bài 7. Cho hai đường tròn (O), (O$_1$) và đường thẳng d. Tìm trên d một điểm P sao cho tiếp tuyến vẽ từ P đến (O), (O$_1$) tạo thành một góc nhận d làm đường phân giác.

Giải

Phân tích: Giả sử dựng được điểm $P \in d$ sao cho d là phân giác của các tiếp tuyến PT, PT_1 với đường tròn (O), (O_1). Suy ra PT và PT_1 đối xứng với nhau qua đường thẳng d.

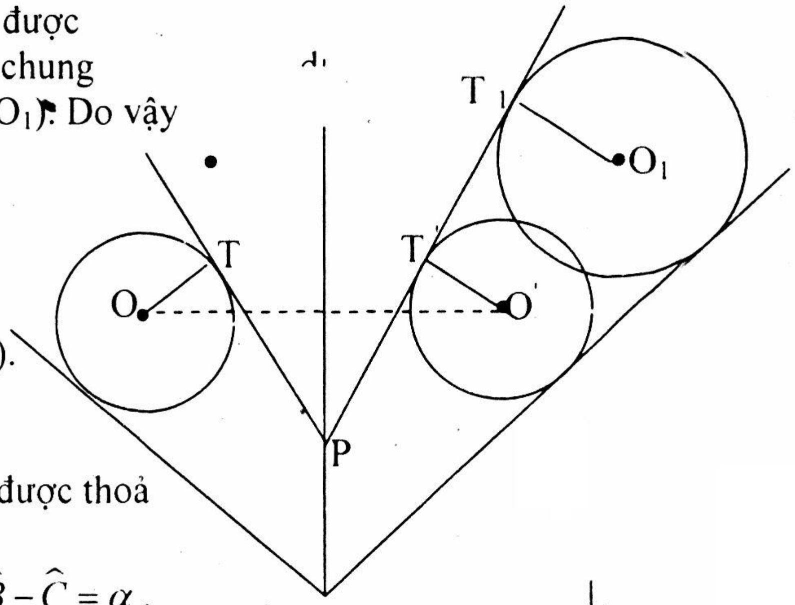
Phép đối xứng trục d là Đ$_d$: $(O) \rightarrow (O')$ nên PT_1 cũng là tiếp tuyến của (O').

Cách dựng:

- Dựng đường tròn (O') đối xứng với đường tròn (O) qua đường thẳng d.
- Dựng tiếp tuyến chung $T'T_1$ của hai đường tròn (O') và (O_1).
- Dựng điểm P là giao của hai đường thẳng $T'T_1$ và d.

Chứng minh: Theo cách dựng thì tiếp tuyến với đường tròn (O) là PT đối xứng tiếp tuyến chung $T'T_1$ qua đường thẳng d nên d là phân giác góc $\widehat{TPT_1}$.

Biện luận: Số điểm P dựng được phụ thuộc vào số tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O') và (O_1). Do vậy số điểm P là 1, 2, 3 hoặc 4.



Bài 8. Dựng tam giác ABC, biết AB = c, AC = b và $\hat{B} - \hat{C} = \alpha$ (α là góc đã cho).

Giải

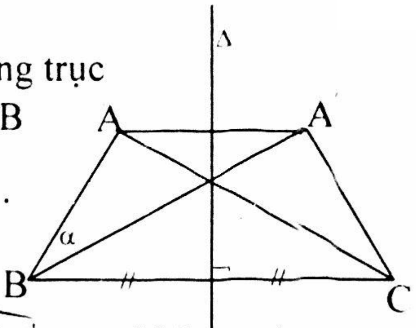
Phân tích:

Giả sử tam giác ABC dựng được thoả mãn điều kiện bài toán.

Ta có: AB = c, AC = b và $\hat{B} - \hat{C} = \alpha$.

Gọi Δ là đường trung trực cạnh BC, xét phép đối xứng trục $D_\Delta: B \rightarrow C,\ A \rightarrow A'$ thì $AC = A'B$ và $\Delta ABC = \Delta A'CB$

$$\Rightarrow \widehat{ABA'} = \widehat{ABC} - \widehat{A'BC} = \widehat{ABC} - \widehat{ACB} = \hat{B} - \hat{C} = \alpha.$$



Cách dựng:

- Dựng tam giác ABA' khi biết AB = c, $A'B = b$, $\widehat{ABA'} = \alpha$ thì dựng được.
- Dựng đường trung trực Δ của cạnh AA'.
- Dựng điểm C đối xứng với điểm B qua Δ, tam giác ABC dựng được.

Chứng minh: Theo cách dựng ta có AB = c, $AC = A'B = b$ và

$$\hat{B} - \hat{C} = \widehat{ABC} - \widehat{ACB} = \widehat{ABC} - \widehat{A'BC} = \widehat{ABA'} = \alpha.$$

Biện luận:

* Nếu $0^0 < \alpha < 180^0$ thì dựng được một tam giác ABA' nên dựng được một tam giác ABC, bài toán có một nghiệm hình duy nhất.

* Nếu $\alpha \geq 180^0$ thì không dựng được tam giác ABA' nên không dựng được tam ABC. Bài toán vô nghiệm.

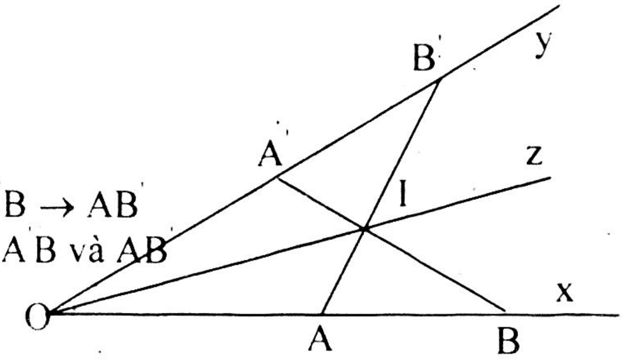
Dạng 4. Áp dụng phép đối xứng trục vào chứng minh

Phương pháp

1. Xác định phép đối xứng trục.
2. Tính chất của phép đối xứng trục biến một hình thành hình bằng nó.

Bài 9. Cho góc xOy, trên tia Ox lấy hai điểm A, B và trên tia Oy lấy hai điểm A', B' sao cho OA = OA', OB' = OB'. Chứng minh giao điểm của AB' và BA' nằm trên tia phân giác của góc xOy.

Giải



Gọi Oz là tia phân giác của góc xOy.

Ta có OA = OA', OB = OB'

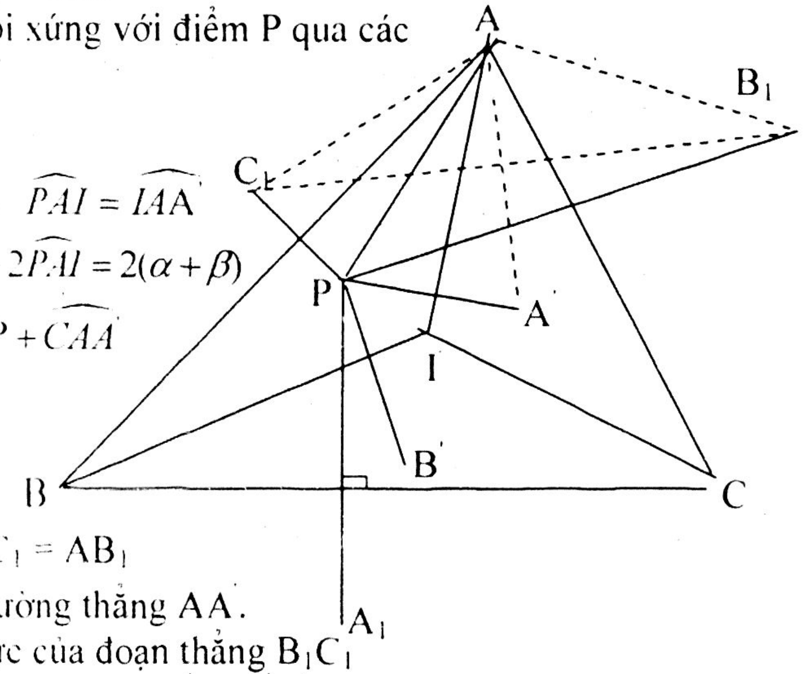
Suy ra: $Đ_{Oz}$: A → A', B → B' ⇒ $Đ_{Oz}$: A'B → AB'

Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng A'B và AB'

Thì I là điểm kép của phép đối xứng trục Oz nên I thuộc Oz.

Bài 10. Cho tam giác ABC, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác và P là điểm nằm trong tam giác. Gọi A', B', C' là các điểm đối xứng với P qua các đường thẳng AI, BI, CI. Chứng minh rằng các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy.

Giải



Gọi A_1, B_1, C_1 là các điểm đối xứng với điểm P qua các đường thẳng BC, AC, AB.

Đặt $\widehat{PAB}=\alpha$ và $\widehat{PAI}=\beta$

A' đối xứng với P qua AI nên $\widehat{PAI}=\widehat{IAA'}$

$\widehat{C_1AA'}=\widehat{C_1AP}+\widehat{PAA'}=2\widehat{PAB}+2\widehat{PAI}=2(\alpha+\beta)$

$\widehat{B_1AA'}=\widehat{B_1AC}+\widehat{CAA'}=\widehat{CAP}+\widehat{CAA'}$

$=\widehat{PAA'}+\widehat{A'AC}+\widehat{CAA'}$

$=2\beta+2\alpha=2(\beta+\alpha)$

Suy ra: $\widehat{C_1AA'}=\widehat{B_1AA'}$ và $AC_1=AB_1$

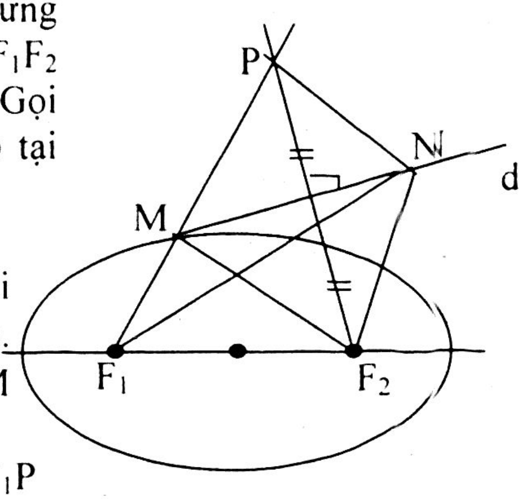
Nên C_1 và B_1 đối xứng qua đường thẳng AA'.

Suy ra AA' là đường trung trực của đoạn thẳng B_1C_1

Tương tự, ta cũng chứng minh được BB', CC' lần lượt là đường trung trực của các đoạn thẳng C_1A_1, A_1B_1. Suy ra: AA', BB', CC' là các đường trung trực của Δ $A_1B_1C_1$ nên chúng đồng quy tại điểm I là tâm đường tròn ngoại tiếp Δ $A_1B_1C_1$.

Bài 11. Cho một elip (E) với hai tiêu điểm F_1, F_2.

Gọi M là điểm bất kì nằm trên elip nhưng không nằm trên đường thẳng F_1F_2. Chứng minh rằng phân giác ngoài của tam giác MF_1F_2 tại đỉnh M cắt elip tại một điểm duy nhất. (Gọi phân giác ngoài đó là tiếp tuyến của elip tại điểm M).



Giải

Gọi d là phân giác ngoài của ΔMF_1F_2 tại đỉnh M và M ∈ (E) nên $MF_1 + MF_2 = 2a$.
Phép đối xứng trục $Đ_d$: $F_2 \to P$ suy ra: M nằm giữa hai điểm P và F_1 và $MF_2 = MP$.
∀ N ∈ d, ta có $NF_1 + NF_2 = NF_1 + NP \geq F_1P$
Mặt khác: $F_1P = F_1M + MP = MF_1 + MF_2 = 2a$
Suy ra: $NF_1 + NF_2 \geq 2a$. Dấu bằng xảy ra khi N≡ M. Vậy, phân giác ngoài của tam giác MF_1F_2 tại đỉnh M cắt elip tại một điểm duy nhất M.

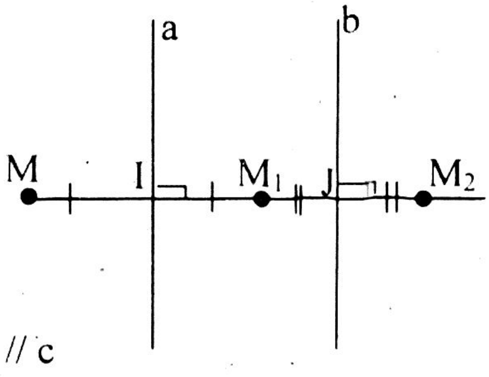
Dạng 5. Tích của các phép đối xứng trục
Phương pháp:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & M' \arrow[r, mapsto, "g"] & M'' \end{tikzcd}$$

Bài 12. a) Chứng minh rằng tích của hai phép đối xứng trục, có trục song song là một phép tịnh tiến.
b) Chứng minh rằng tích của ba phép đối xứng trục, có trục song song là một phép đối xứng trục.
c) Chứng minh rằng tích của phép đối xứng trục $Đ_a$ với phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ có đường thẳng chứa véc tơ $\vec{v}$ vuông góc với trục a là một phép đối xứng trục.

Giải

a) Xét hai phép đối xứng trục D_a, D_b với a // b.



Giả sử: $M \xrightarrow{D_a} M_1 \xrightarrow{D_b} M_2$

$$\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2}$$
$$= 2\overrightarrow{IM_1} + 2\overrightarrow{M_1J} = 2(\overrightarrow{IM_1} + \overrightarrow{M_1J}) = 2\overrightarrow{IJ}$$

Suy ra: $D_b \circ D_a = T_{2\overrightarrow{IJ}}$: M → M_2

b) Xét ba phép đối xứng trục D_a, D_b, D_c với a // b // c

Giả sử: $M \xrightarrow{D_a} M_1 \xrightarrow{D_b} M_2 \xrightarrow{D_c} M_3$

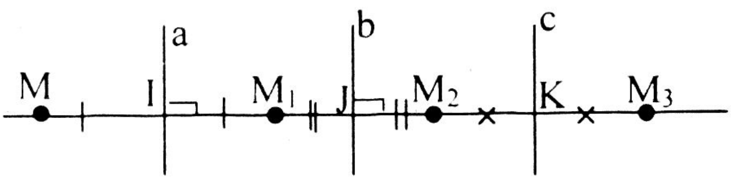
Ta có: $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IM_1} = \vec{0}$; $\overrightarrow{M_1M_2} = 2\overrightarrow{JM_2}$; $\overrightarrow{M_2M_3} = 2\overrightarrow{M_2K}$

Gọi H là trung điểm của MM_3 thì $\overrightarrow{HM} + \overrightarrow{HM_3} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{HI} + \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{HI} + \overrightarrow{IM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_2M_3} = \vec{0}$$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{HI} + 2\overrightarrow{JM_2} + 2\overrightarrow{M_2K} = \vec{0}$

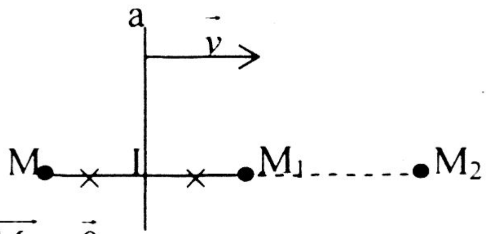
$\Leftrightarrow \overrightarrow{HI} + \overrightarrow{JK} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IH} = \overrightarrow{JK}$



Suy ra: $T_{\overrightarrow{JK}} : I \rightarrow H \Rightarrow T_{\overrightarrow{JK}} : a \rightarrow \Delta$ với Δ // a

Vậy, $D_c \circ D_b \circ D_a = D_\Delta$ với Δ // a // b // c.

c) * Giả sử $M \xrightarrow{D_a} M_1 \xrightarrow{T_{\vec{v}}} M_2$



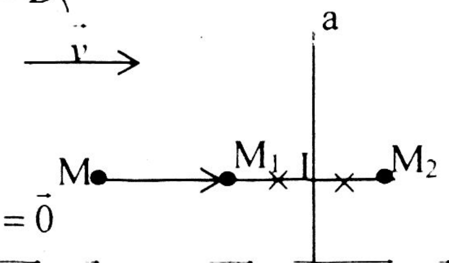
Ta có: $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IM_1} = \vec{0}$; $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{v}$

Gọi H là trung điểm của MM₂ thì $\overrightarrow{HM} + \overrightarrow{HM_2} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{HI} + \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{HI} + \overrightarrow{IM_2} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{HI} + \overrightarrow{IM_2} - \overrightarrow{IM_1} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{HI} + \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{HI} + \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IH} = \frac{1}{2}\vec{v}$

Suy ra: $T_{\frac{1}{2}\vec{v}} : I \rightarrow H \Rightarrow T_{\frac{1}{2}\vec{v}} : a \rightarrow \Delta \Rightarrow T_{\vec{v}} \circ D_a = D_\Delta$



* Giả sử $M \xrightarrow{T_{\vec{v}}} M_1 \xrightarrow{D_a} M_2$

Ta có: $\overrightarrow{IM_1} + \overrightarrow{IM_2} = \vec{0}$; $\overrightarrow{MM_1} = \vec{v}$

Gọi H là trung điểm của MM₂ thì $\overrightarrow{HM} + \overrightarrow{HM_2} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{HI} + \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{HI} + \overrightarrow{IM_2} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{HI} + \overrightarrow{IM_2} - \overrightarrow{IM_1} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{HI} + \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IH} = -\frac{1}{2}\vec{v}$. Suy ra: $T_{\frac{1}{2}\vec{v}} : I \rightarrow H \Rightarrow T_{-\frac{1}{2}\vec{v}} : a \rightarrow \Delta \Rightarrow D_a \circ T_{\vec{v}} = D_\Delta$

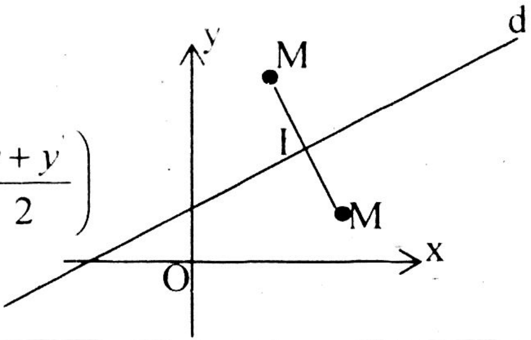
Dạng 6. Biểu thức giải tích của phép đối xứng trục

Trong mặt phẳng với hệ toạ độ vuông góc Oxy cho đường thẳng d: Ax + By + C = 0 với $A^2 + B^2 \neq 0$ và một điểm M(x, y). Gọi M' (x', y') đối xứng với M qua phép đối xứng trục d. Tìm biểu thức liên hệ x, y và x', y'

Ta có. $\overrightarrow{MM'} = (x' - x ; y' - y)$ cùng phương với $\vec{n} = (A ; B)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = x + At \\ y' = y + Bt \end{cases} \text{ với } t \in R$$

Gọi I là trung điểm của MM' thì $I\left(\frac{x + x'}{2}; \frac{y + y'}{2}\right)$



thì I∈d nên

$$A\left(\frac{x+x'}{2}\right)+B\left(\frac{y+y'}{2}\right)+C=0\Leftrightarrow A\left(x+x+At\right)+B\left(y+y+Bt\right)+2C=0.$$

$$\Leftrightarrow\left(A^2+B^2\right)t=-2\left(Ax+By+C\right)\Leftrightarrow t=-\frac{2\left(Ax+By+C\right)}{A^2+B^2}$$

$$\text{Vậy, }\begin{cases}x'=x-\dfrac{2A\left(Ax+By+C\right)}{A^2+B^2}\\[2ex] y'=y-\dfrac{2B\left(Ax+By+C\right)}{A^2+B^2}\end{cases}\quad(1)$$

Gọi (1) là biểu thức giải tích của phép đối xứng trục d.

Bài 13. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ vuông góc Oxy cho đường thẳng d:

2x – y – 3 = 0.

a) Viết biểu thức giải tích của phép đối xứng trục $Đ_d$.

b) Tìm ảnh điểm M' của điểm M (4 ; – 1) qua phép đối xứng trục $Đ_d$.

c) Viết phương trình đường thẳng Δ' là ảnh của đường thẳng Δ: x –3y +11 = 0 qua phép đối xứng trục $Đ_d$.

d) Viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 27 = 0$ qua phép đối xứng trục $Đ_d$.

Giải

a) Biểu thức giải tích của phép đối xứng trục $Đ_d$:

$$\begin{cases}x'=x-\dfrac{4\left(2x-y-3\right)}{5}\\[2ex] y'=y+\dfrac{2\left(2x-y-3\right)}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y+\dfrac{12}{5}\\[2ex] y'=\dfrac{4}{5}x+\dfrac{3}{5}y-\dfrac{6}{5}\end{cases}$$

b) Toạ độ điểm M' là ảnh của M qua $Đ_d$ là $M'\left(-\frac{4}{5};\frac{7}{5}\right)$.

c) Lấy $M\left(x\,;y\right)\in\Delta\xrightarrow{Đ_d}M'\left(x'\,;y'\right)\in\Delta'$, ta có:

$$\begin{cases}x'=-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y+\dfrac{12}{5}\\[2ex] y'=\dfrac{4}{5}x+\dfrac{3}{5}y-\dfrac{6}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{3}{5}x'+\dfrac{4}{5}y'+\dfrac{12}{5}\\[2ex] y=\dfrac{4}{5}x'+\dfrac{3}{5}y'-\dfrac{6}{5}\end{cases}\quad(*)$$

Ta có M∈Δ nên x –3y +11 = 0 (* *).

Thay (*) vào (* *), ta có 3x' + y' –17 = 0

Phương trình đường thẳng Δ' là: 3x + y – 17 = 0.

d) Phương trình của đường tròn (C): $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 2$ có tâm I (5 ; 2) và bán kính $R = \sqrt{2}$. Ta có: $Đ_d$: I → I' nên I'(1 ; 4), suy ra: $Đ_d$: (C) → (C'), (C') có tâm I' và bán kính $R = \sqrt{2}$.
Phương trình đường tròn (C') là: $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 2$.

Bài 14. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ vuông góc Oxy, một phép biến hình f biến M(x ; y)→ M'(x' ; y') có biểu thức giải tích:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{1}{2}y \end{cases} \quad (1)$$

a) Tìm tập hợp Δ các điểm kép của phép biến hình f.

b) Xác định biểu thức giải tích của phép biến hình g biến M'(x' ; y')→ M(x ; y). Có nhận xét gì?

c) Chứng tỏ rằng f là phép đối xứng trục, có trục là đường thẳng Δ.

Giải

a) Gọi $M(x_0 ; y_0)$là điểm kép của phép biến hình f thì f:$M(x_0 ; y_0) \to M(x_0 ; y_0)$ thay vào (1), ta có: $x_0 - \sqrt{3}y_0 = 0$.

Tập hợp các điểm kép của f là đường thẳng Δ có phương trình: $x - \sqrt{3}y = 0$

b) Phép biến hình g biến M'(x' ; y')→ M(x ; y)

$$\text{Từ } \begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{1}{2}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}x' + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y' \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x' - \dfrac{1}{2}y' \end{cases} \quad (2)$$

So sánh hai biểu thức (1) và (2) ta có f = g.

c) f: M(x ; y)→ M'(x' ; y') nên $\overrightarrow{MM'} = \left(-\dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y ; \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{3}{2}y\right)$

Véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{\Delta} = \left(\sqrt{3} ; 1\right)$.

$$\overrightarrow{MM'}.\vec{\Delta} = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right).\sqrt{3} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{2}y\right) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MM'} \perp \vec{\Delta} \Rightarrow MM' \perp \Delta.$$

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng MM' thì $I\left(\dfrac{3x + y\sqrt{3}}{4} ; \dfrac{\sqrt{3}x + y}{4}\right)$ thay vào phương trình của đường thẳng Δ, ta có:

$$\left(\frac{3x+y\sqrt{3}}{4}\right)-\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}x+y}{4}\right)=\frac{3x+y\sqrt{3}-3x-y\sqrt{3}}{4}=0 \text{ nên } I\in\Delta.$$

Vậy, f là phép đối xứng trục, với trục đối xứng là đường thẳng Δ.

BÀI TẬP

Bài 1. Cho một đường thẳng a và hai điểm A, B nằm khác phía đối với a. Tìm trên đường thẳng a một điểm M sao cho hiệu các khoảng cách MA, MB là lớn nhất.

Bài 2. Cho tứ giác lồi ABCD có diện tích S và độ dài các cạnh AB = a, BC = b, CD = c và AD = d. Chứng minh $S \le \dfrac{ac+bd}{2}$.

Bài 3. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC, đi qua điểm cố định P và hai đỉnh B, C thuộc đường thẳng cố định, trực tâm H cố định.

a) Tìm quỹ tích tâm O của đường tròn (O).

b) Dựng tam giác ABC, biết N là trung điểm của cạnh AB.

Bài 4. Cho hai đường tròn (O), (O_1) và một đường thẳng Δ. Tìm điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho các tiếp tuyến kẻ từ M đến hai đường tròn đó tạo với đường thẳng Δ các góc bằng nhau.

Bài 5. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Dựng tam giác MNP với M, N, P lần lượt thuộc các cạnh BC, AC và AB sao cho chu vi tam giác MNP nhỏ nhất.

Bài 6. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC và H là trực tâm của tam giác. Gọi (O_1), (O_2), (O_3) là các đường tròn tâm O_1, O_2, O_3 đối xứng với đường tròn (O) qua các cạnh của tam giác ABC. Chứng minh các đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) đi qua H và $\Delta ABC = \Delta O_1O_2O_3$.

Bài 7. Cho tam giác ABC có AB = AC nội tiếp đường tròn (O). Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Các đường thẳng CI, BI cắt đường tròn (O) lần lượt tại M, N. Tứ giác AMIN là hình gì? Tại sao?

Bài 8. Cho hypebol (H) với hai tiêu điểm F_1, F_2. Gọi M là điểm nằm trên (H) nhưng không nằm trên đường thẳng F_1F_2 và d là phân giác trong của tam giác MF_1F_2 tại M. Chứng minh rằng đường thẳng d chỉ cắt (H) tại điểm duy nhất M.

Bài 9. Cho tam giác ABC, đường cao AH (H∈BC). Gọi D, E lần lượt là các điểm đối xứng với H qua AB, AC. Đường thẳng DE cắt AB, AC lần lượt tại M, N. Chứng minh AH là đường phân giác của góc $\widehat{MHN}$.

Bài 10. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho điểm M(3; –5), đường thẳng d: 3x + 2y – 6 = 0 và đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$. Tìm ảnh của M, đường thẳng d và đường tròn (C) qua phép đối xứng trục Δ.

a) Δ là trục hoành.
b) Δ là trục tung.

c) Δ là đường thẳng x – y + 1 = 0.

Bài 11. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho hai đường thẳng

$d_1: x - 5y + 7 = 0$ và $d_2: 5x - y - 13 = 0$.

Tìm phép đối xứng trục biến đường thẳng d_1 thành đường thẳng d_2

Bài 12. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy. Một phép biến hình f: M(x ; y)→ M'(x' ; y') có biểu thức giải tích:

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}x + \dfrac{2}{3}y \\ y' = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{\sqrt{5}}{3}y \end{cases}$$

a) Tìm tập hợp Δ các điểm kép của phép biến hình f.

b) Xác định biểu thức giải tích của phép biến hình g biến M'(x' ; y')→ M(x ; y). Có nhận xét gì?

c) Chứng tỏ rằng f là phép đối xứng trục, có trục là đường thẳng Δ.

§3. PHÉP QUAY VÀ PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

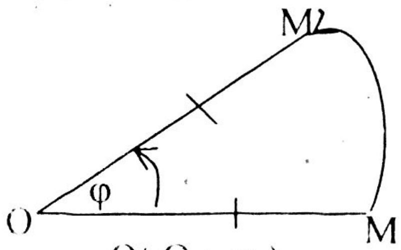
A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. Phép quay

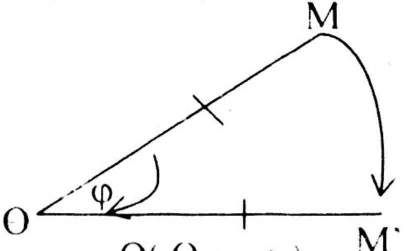
1. Định nghĩa: Trong mặt phẳng, cho điểm O cố định và một góc lượng giác φ không đổi. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho OM' = OM và (OM, OM') = φ được gọi là phép quay tâm O với góc quay φ.

Kí hiệu: Q(O ; φ)

2. Chiều dương của phép quay Q(O ; φ) theo chiều dương của đường tròn lượng giác. Ngược lại là chiều âm và con kí hiệu Q(O ; - φ)



Q(O ; φ)



Q(O ; - φ)

3. Định lí: Phép quay là một phép dời hình

$$Q(O\,;\varphi): AM \to A'M' \Leftrightarrow \begin{cases} A'M' = AM \\ \left(AM, A'M'\right) = \varphi \end{cases}$$

II. Phép đối xứng tâm

1. Định nghĩa: Phép đối xứng qua điểm O là một phép quay tâm O với góc quay 180^0, tức là biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \vec{0}$$

Kí hiệu: $Đ_O$

– Điểm O gọi là tâm của phép đối xứng.

2. Tâm đối xứng của một hình: Điểm **O** gọi là tâm đối xứng của một hình **H** nếu phép đối xứng **Đ$_O$** biến hình **H** thành chính nó, tức là **Đ$_O$(H) = H**.

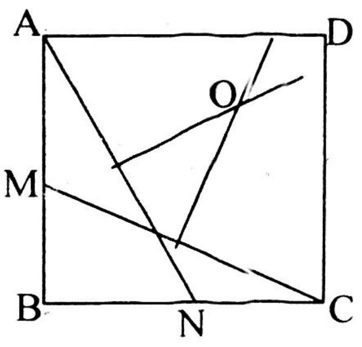
B. CÁC DẠNG TOÁN.

Dạng 1. Xác định phép quay

Phương pháp: 1. Phép biến hình biến AM thành A'M'

2. AM = A'M' và (AM, A'M') = φ

3. Tâm quay O là giao của hai trong các đường sau: Đường trung trực của AA' ; đường trung trực của MM' ; đường tròn (IAA') ; đường tròn (IMM') với I là giao điểm của hai đường thẳng AM, A'M'.



Bài 1. Cho hình vuông ABCD có các đỉnh vẽ theo chiều dương. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC. Xác định phép quay biến $\overrightarrow{AM}$ thành $\overrightarrow{NC}$.

Giải

Ta có: AM = NC và (AM, NC) = 90^0. Suy ra NC là ảnh của AM qua phép quay tâm O, góc quay 90^0. Tâm O là giao điểm của hai đường trung trực của AN, CM.

Dạng 2. Tìm ảnh của một hình (H) cho trước qua phép quay Q(O ; φ)

Phương pháp:

1. Lấy bất kì điểm M ∈ (H).
2. Dựng ảnh M' của M qua phép quay Q(O ; φ) OM = OM' và (OM, OM'') = φ.
3. Dựa vào tính chất của phép quay để tìm tập hợp các điểm M'. Từ đó suy ra hình H'.

Bài 2. Cho phép quay Q(O ; φ) và đường thẳng d không đi qua O.

a) Gọi H là hình chiếu của O trên d. Dựng ảnh H' của H qua phép quay Q(O ; φ).

b) Nêu cách dựng đường thẳng d' là ảnh của đường thẳng d phép quay Q(O ; φ).

c) Có nhận xét gì về góc tạo bởi hai đường thẳng d', d trong các trường hợp:

$$0 < \varphi \le 90^0 \quad \text{và} \quad 90^0 < \varphi < 180^0$$

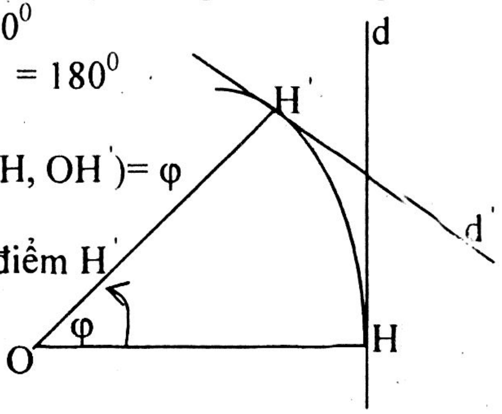
d) Nhận xét gì về hai đường thẳng d', d khi φ = 180^0

Giải

a) Ta có: Q(O ; φ): H → H' ⇒ OH = OH' và (OH, OH')= φ

– Vẽ cung tròn tâm O, bán kính R = OH.

– Trên cung tròn, theo chiều quay dương lấy điểm H'



sao cho $\widehat{HOH'} = \varphi$

- Điểm H' dựng được.

b) Ta có: OH ⊥ d nên d là tiếp tuyến của đường tròn (O ; R) với bán kính **R = OH**

Q(O ; φ): d → d' ⇒ d' là tiếp tuyến của đường tròn (O ; R) tại H'.

- Dựng điểm H' là ảnh của điểm H qua phép quay Q(O ; φ).
- Dựng đường thẳng d' vuông góc với OH' tại H'.

c) Góc tạo bởi hai đường thẳng d và d' bằng góc φ hoặc bù với góc φ.

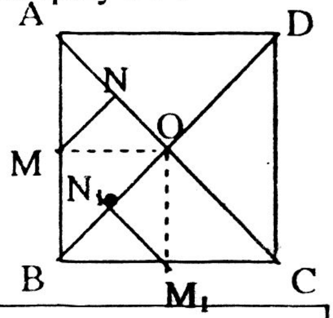
* Khi $0 < \varphi \le 90^0$ thì (d, d') = φ.

* Khi $90^0 < \varphi < 180^0$ thì (d, d') = $180^0 - \varphi$.

d) Khi $\varphi = 180^0$ thì Q(O ; φ): H → H' ⇒ $\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OH'} = \vec{0}$ ⇒ O **là trung điểm** của HH' nên Q(O ; φ): d → d' ⇒ d' ⊥ HH' và d ⊥ HH' ⇒ **d' // d và** cách đường thẳng d một khoảng bằng 2OH.

Bài 3. Cho hình vuông ABCD tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung **điểm của AB**, OA. Tìm ảnh của tam giác AMN qua phép quay tâm O, góc quay **90^0.**

Giải



Xét phép quay Q(O ; 90^0): A → B, M → M_1

⇒ Q(O ; 90^0): N → N_1.

N là trung điểm của OA thì N_1 là trung điểm của OB.

Suy ra: Q(O ; 90^0): ΔAMN → Δ BM_1N_1

và ΔAMN = Δ BM_1N_1.

Dạng 3. Tìm quỹ tích (Tập hợp điểm) bằng phép quay Q(O ; φ)

Phương pháp: 1. Xác định phép quay biến điểm M thành điểm M'

2. Xác định quỹ tích của điểm M.

3. Dựa vào tính chất của phép quay để tìm quỹ tích **của điểm** M'.

Bài 4. Cho điểm I cố định. Gọi M, M' là hai điểm sao cho tam **giác IMM'** vuông cân tại I.

a) Cho điểm M chạy trên một đường tròn (O). Tìm quỹ tích các **điểm M'.**

b) Cho điểm M chạy trên đường thẳng d. Tìm quỹ tích các điểm **M'. Gọi H là** hình chiếu của I xuống MM'. Tìm quỹ tích các điểm H.

Giải

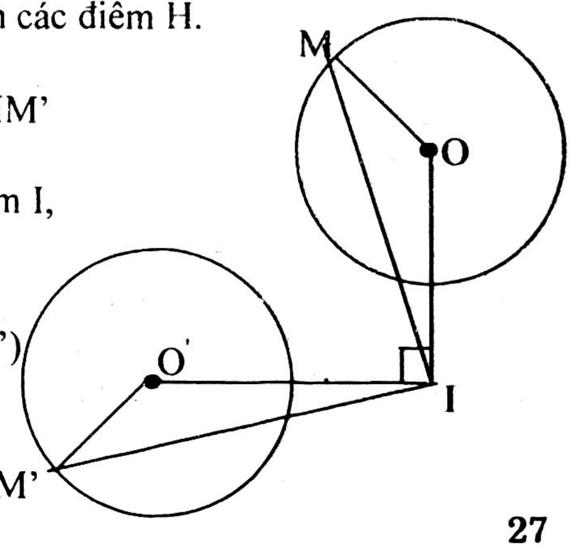
Ta có: ΔIMM' vuông cân tại I nên IM = IM' và (IM, IM') = 90^0.

Suy ra, M' là ảnh của M qua phép quay tâm I, góc quay 90^0. Tức là: Q(I ; 90^0): M → M'

a) Khi M ∈(O)

Q(I ; 90^0): O → O' ⇒ Q(I ; 90^0): (O)→(O')

Suy ra: M' ∈(O').



Vậy, quỹ tích điểm M' là đường tròn (O'), ảnh của đường tròn (O) qua phép quay $Q(I ; 90^0)$

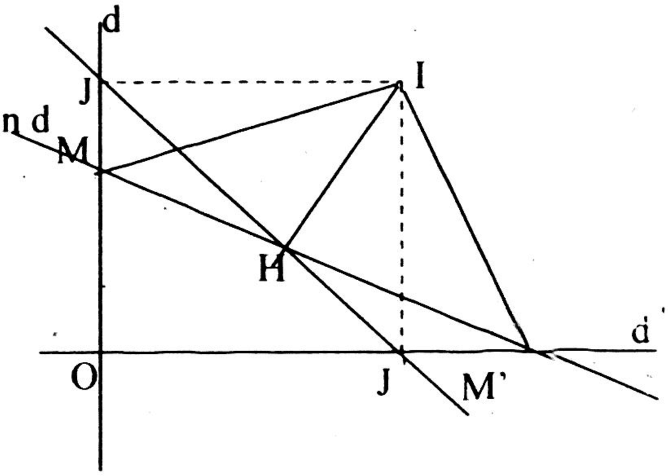
b) Khi $M \in d$

Gọi J là hình chiếu vuông góc của I lên d

$Q(I ; 90^0): J \to J'$

$\Rightarrow Q(I ; 90^0): d \to d'$ và d' vuông góc với IJ' tại J', $d \perp d'$

$M \in d \Rightarrow M' \in d'$. Vậy, quỹ tích



điểm M' là đường thẳng d' đi qua J' và vuông góc với d.

* Tìm quỹ tích điểm H.

Kẻ $IH \perp MM' \Rightarrow \widehat{MIH} = 45^0$

(Do ΔIMM' vuông cân tại I).

Suy ra: Tứ giác IJMH nội tiếp đường tròn, đường kính MI.

$\Rightarrow \widehat{MJH} = \widehat{MIH} = 45^0$ (cùng chắn cung $\widehat{MH}$).

Ta có: $\widehat{MJJ'} = 45^0$ (JJ' là đường chéo hình vuông OJIJ') $\Rightarrow \widehat{MJH} = \widehat{MJJ'}$.

Hai điểm H và J' nằm cùng phía đối với đường thẳng d nên $H \in JJ'$.

Suy ra, quỹ tích của điểm H là đường thẳng JJ'.

Bài 5. Cho ba điểm A, B, C cố định trên đường tròn (O) và điểm M thay đổi trên (O). Gọi M_1 đối xứng với M qua A, M_2 đối xứng với M_1 qua B và M_3 đối xứng với M_2 qua C. Tìm quỹ tích của điểm M_3.

Giải

Gọi D là trung điểm của M và M_3 thì AD là đường trung bình của ΔMM_1M_3

$\Rightarrow AD // M_1M_3$ và $AD = \frac{1}{2} M_1M_3$ (1)

Ta có: BC là đường trung bình $\Delta M_1M_2M_3$

$\Rightarrow BC // M_1M_3$ và $BC = \frac{1}{2} M_1M_3$. (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra:

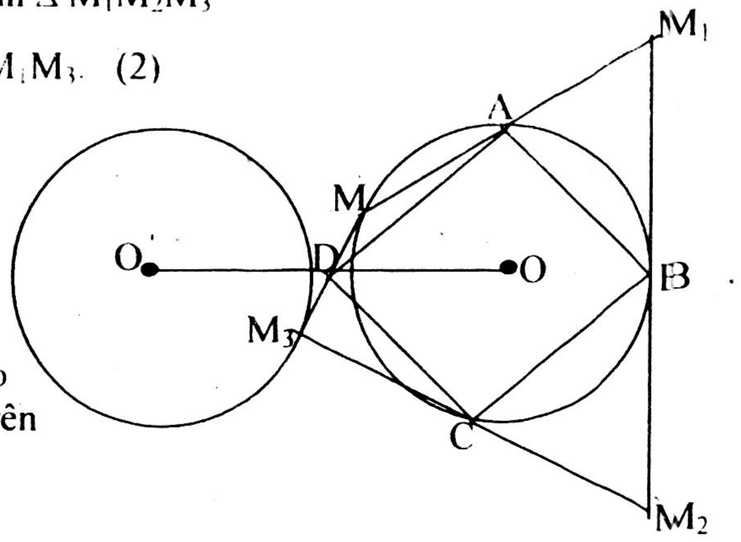
AD // BC và AD = BC

nên ABCD là hình bình hành

Ta có: A, B, C cố định nên D cố định.

Xét phép đối xứng tâm D là $Đ_D$

$Đ_D$: $M \to M_3$. Điểm M chạy trên đường tròn (O)



nên điểm M_3 chạy trên đường tròn (O'), (O') là ảnh của đường tròn (O) qua phép đối xứng tâm D. Vậy, quỹ tích các điểm M_3 là đường tròn (O').

Dạng 4. Áp dụng phép quay vào dựng hình

Phương pháp:

1. Quy bài toán dựng hình về bài toán dựng điểm M nào đó phụ thuộc vào hai điều kiện độc lập (α) và (β).
2. Xác định phép quay để tìm điều kiện (α) gọi là H_α và điều kiện (β) gọi là H_β.
3. Điểm M là giao của H_α và H_β.

Bài 6. Dựng tam giác đều có ba đỉnh nằm trên ba đường thẳng song song cho trước.

Giải

Phân tích: Giả sử dựng được tam giác đều ABC, $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$

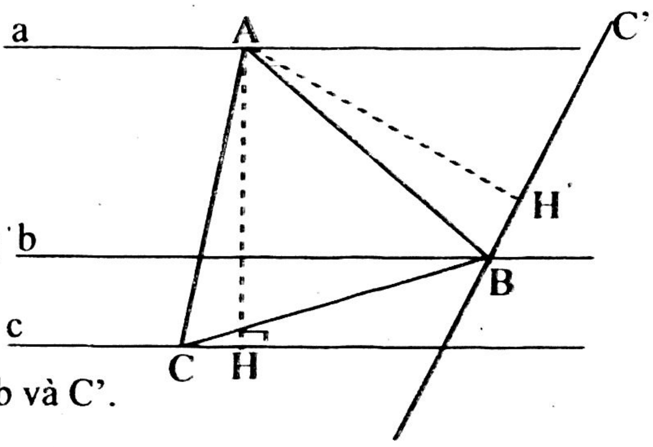
Ta có: AC = AB và (AC, AB) = 60^0

Suy ra: $Q(A\,;60^0): C \to B$

Kẻ $AH \perp c$ tại H thì $Q(A\,;60^0): H \to H'$

$\Rightarrow Q(A\,;60^0): c \to C'$ và C' vuông góc với AH' tại H'

$\Rightarrow$ B là giao điểm của hai đường thẳng b và C'.



Cách dựng:

- Lấy một điểm A bất kì trên đường thẳng a.
- Dựng đường thẳng C' là ảnh của đường thẳng c qua phép quay $Q(A\,;60^0)$.
- Dựng điểm B giao điểm của hai đường thẳng b và C'.
- Dựng điểm C là ảnh của điểm B qua phép quay $Q(A\,;-60^0)$.
- Tam giác ABC dựng được.

Chứng minh:

Theo cách dựng, ta có: AB = AC và $\widehat{BAC} = 60^0$ nên tam giác ABC đều.

Biện luận:

Đường thẳng c' là ảnh của đường thẳng c qua phép quay $Q(A\,;60^0)$ hoặc $Q(A\,;-60^0)$. Từ đó ta dựng được hai điểm B và B_1 nên bài toán có hai nghiệm hình.

Bài 7. Cho hai đường tròn (O; R) và $(O_1; R_1)$ cắt nhau tai hai điểm A và B. Hãy dựng một đường thẳng d đi qua A, cắt đường tròn (O;R) và $(O_1; R_1)$ lần lượt tại M, M_1 sao cho A là trung điểm MM_1.

Giải.

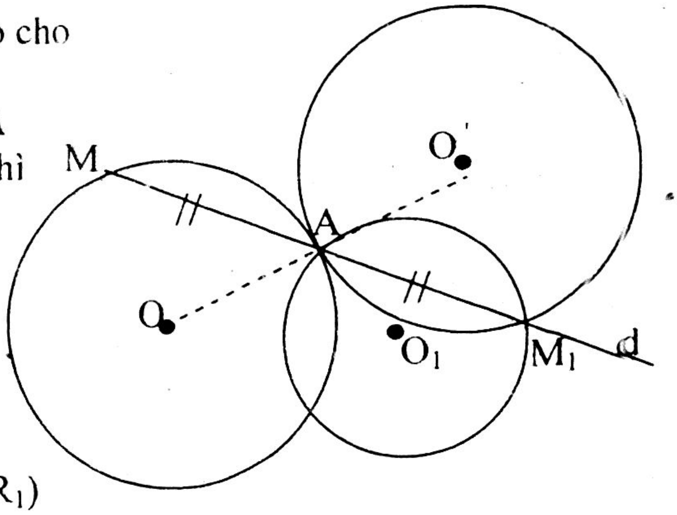
Phân tích: Giả sử dựng được đường thẳng d đi qua A, cắt đường tròn (O;R) và $(O_1; R_1)$ lần lượt tại M, M_1 sao cho A là trung điểm MM_1.

Suy ra: M_1 đối xứng với M qua A

Gọi $Đ_A$ là phép đối xứng tâm A thì

$Đ_A$: M → M_1

M thuộc đường tròn (O; R) nên M_1 thuộc đường tròn (O'; R) là ảnh của đường tròn (O; R) qua phép đối xứng $Đ_A$. Suy ra: M_1 là giao điểm thứ hai của đường tròn (O'; R) với đường tròn $(O_1; R_1)$ nên đường thẳng d đi qua A và M_1.



Cách dựng:

– Dựng đường tròn (O'; R) là ảnh của đường tròn (O; R) qua phép đối xứng $Đ_A$.

– Dựng điểm M_1 là giao điểm thứ hai của đường tròn (O'; R) với đường tròn $(O_1; R_1)$ (M_1 khác điểm A).

– Dựng đường thẳng d đi qua A và M_1 là đường thẳng cần dựng.

Chứng minh:

Gọi M là giao điểm thứ hai của đường thẳng d với đường tròn (O; R) (M ≠ A)

Theo cách dựng, ta có:

ΔOMA cân tại O ⇒ OA = OM = R và $\widehat{OAM} = \widehat{OMA}$

$\Delta O'M_1A$ cân tại O' ⇒ $O'A = O'M_1 = R$ và $\widehat{O'AM_1} = \widehat{O'M_1A}$

$\widehat{OAM} = \widehat{O'AM_1}$ (đối đỉnh)

⇒ $\widehat{AOM} = \widehat{AO'M_1}$; $\widehat{OMA} = \widehat{O'M_1A}$ và $OM = O'M_1$

⇒ $\Delta OMA = \Delta O'M_1A$ ⇒ $MA = M_1A$.

Biện luận: Bài toán có một nghiệm hình.

Bài 8. Cho hình vuông ABCD và một điểm M nằm trên một cạnh hình vuông. Tìm các điểm N, P nằm trên cạnh hình vuông sao cho tam giác MNP là tam giác đều.

Giải

Phân tích: Giả sử dựng được tam giác đều MNP sao cho M ∈ AD, N ∈ AB và P ∈ DC.)

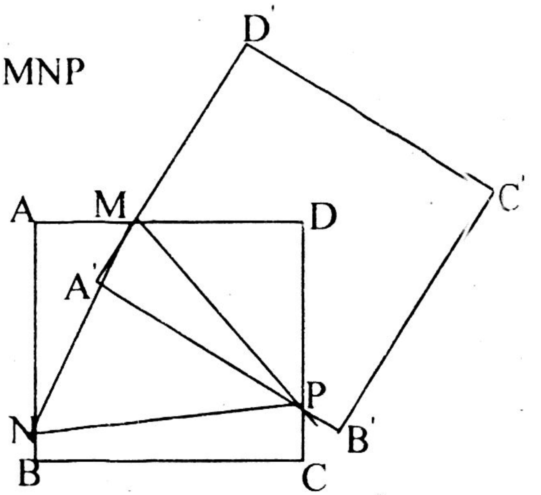
Ta có: MN = MP và (MN, MP) = 60^0

$Q(M ; 60^0)$: N → P

⇒ $Q(M ; 60^0)$: AB → A'B'.

Suy ra, P là giao điểm của hai đường thẳng A'B' và CD.

Cách dựng:



– Lấy điểm M bất kì trên cạnh AD.
– Dựng đường thẳng $A'B'$ là ảnh của đường thẳng AB qua phép quay $Q(M ; 60^0)$.
– Dựng điểm P là giao điểm của hai đường thẳng $A'B'$ và CD.
– Dựng điểm N là ảnh của điểm P qua phép quay $Q(M ; -60^0)$.
– Tam giác MNP dựng được.

Chứng minh: Theo cách dựng, ta có: MN = NP và $\widehat{NMP} = 60^0$.
Mặt khác: P thuộc cạnh $A'B'$ nên N cũng thuộc cạnh AB.

Biện luận: Cạnh $A'B'$ cắt cạnh DC tại một điểm duy nhất P nên bài toán có một nghiệm hình.

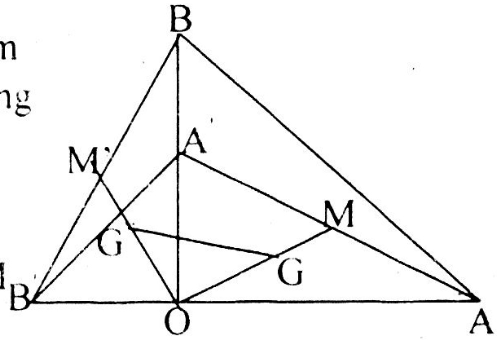
Dạng 5. Áp dụng phép quay vào chứng minh

Phương pháp: 1. Xác định phép quay $Q(O ; \varphi)$
2. Áp dụng tính chất của phép quay: Biến một hình thành một hình bằng nó.

Bài 9. Cho tam giác vuông cân OAB và $OA'B'$ có chung đỉnh O sao cho O nằm trên đoạn thẳng AB' và nằm ngoài đoạn thẳng $A'B$. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm tam giác OAA' và OBB'. Chứng minh GOG' là tam giác vuông cân.

Giải

Ta có: OA = OB và $\widehat{AOB} = 90^0$, $OA' = OB'$ và $\widehat{A'OB'} = 90^0$
$\Rightarrow Q(O ; 90^0): A \rightarrow B ; A' \rightarrow B'$
$\Rightarrow Q(O ; 90^0): AA' \rightarrow BB'$. Gọi M là trung điểm của AA' thì $Q(O ; 90^0)$: $M \rightarrow M'$ và M' là trung điểm của BB'.



$\Rightarrow OM = OM'$ và $\widehat{MOM'} = 90^0$.

G là trọng tâm tam giác OAA' thì $OG = \frac{2}{3}OM$

G' là trọng tâm tam giác OBB' thì $OG' = \frac{2}{3}OM'$.

Suy ra: $OG = OG'$ và $\widehat{GOG'} = 90^0 \Rightarrow \Delta GOG'$ là tam giác vuông cân.

Bài 10. Cho tam giác đều ABC. Trên các cạnh AB, BC, CA lấy các điểm K, L, M sao cho $\frac{AK}{KB} = \frac{BL}{LC} = \frac{CM}{MA}$. Nối AL, BM, CK các đường thẳng này đôi một cắt nhau tạo thành một tam giác. Chứng minh rằng tam giác đó là tam giác đều và có tâm trùng với tâm của tam giác ABC.

Giải

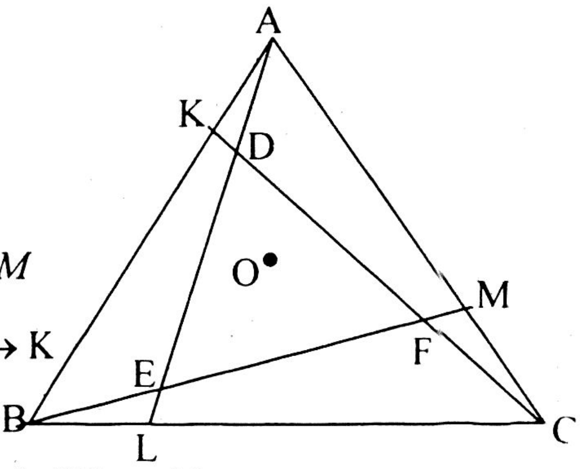
Gọi tam giác tạo thành là DEF và O là tâm Δ ABC cũng là trọng tâm tam giác (Do Δ ABC đều).
$\Rightarrow OA = OB = OC$ và $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA} = 120^0$
Xét phép quay $Q(O ; 120^0): A \rightarrow B ; B \rightarrow C$ và

C→ A. Ta có: $\frac{AK}{KB}=\frac{BL}{LC}=\frac{CM}{MA}$

$\Rightarrow \frac{AK}{AK+KB}=\frac{BL}{BL+LC}=\frac{CM}{CM+MA}$

$\Leftrightarrow \frac{AK}{AB}=\frac{BL}{BC}=\frac{CM}{CA} \Leftrightarrow AK=BL=CM$

⇒ Q (O; 120^0): K → L ; L → M ; M → K

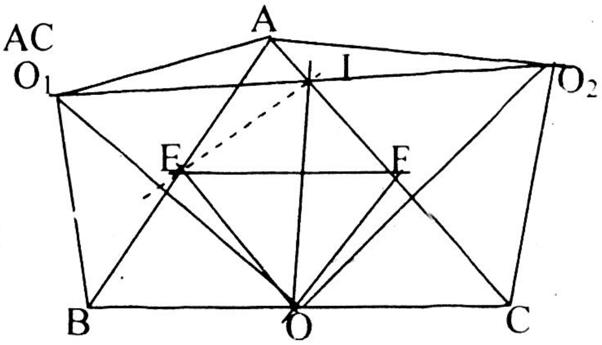


⇒ Q (O; 120^0): AL → BM ; BM → CK và CK → AL

⇒ Q (O; 120^0): E → F ;F → D và D → E ⇒ ΔDEF là tam giác đều và có tâm O

Bài 11. Cho tam giác ABC. Dựng phía ngoài của tam giác ABC các tam giác vuông cân ABO_1, ACO_2 có đỉnh góc vuông ở O_1, O_2. Gọi O là trung điểm cạnh BC. Chứng minh tam giác OO_1O_2 vuông cân.

Giải



Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC

Ta có: ΔABO_1 vuông cân tại O_1

$\Rightarrow O_1E \perp AB$ và $O_1E = \frac{1}{2}AB$

ΔACO_2 vuông cân tại O_2 $\Rightarrow O_2F \perp AC$ và $O_2F = \frac{1}{2}AC$.

Mặt khác: OF là đường trung bình của ΔABC ⇒ OF // AB và OF = $\frac{1}{2}$AB

$\Rightarrow O_1E \perp OF$ và $O_1E = OF$.

Tương tự OE là đường trung bình của ΔABC ⇒ OE // AC và OE = $\frac{1}{2}$AC

$\Rightarrow OE \perp O_2F$ và $OE = O_2F$.

Xét phép quay Q(I ; 90^0): O_1 → O ; E → F ; O → O_2 với tâm quay I là giao điểm của hai đường trung trực OO_1 và EF.

Suy ra: $IO_1 = IO = IO_2$ và $\widehat{O_1IO}=\widehat{OIO_2}=90^0$ $\Rightarrow OI = \frac{1}{2}O_1O_2$ và $OI \perp O_1O_2$

⇒ tam giác OO_1O_2 vuông cân tại O.

Cách khác Ta có: $O_1E = OF$, $OE = O_2F$ và $O_1E \perp OF$, $OE \perp O_2F$

$\Rightarrow \widehat{O_1EO}=\widehat{OFO_2}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)

$\Rightarrow \Delta O_1EO = \Delta OFO_2 \Rightarrow OO_1 = OO_2$ và $\widehat{EO_1O}=\widehat{FOO_2}$ (*)

Mặt khác: $O_1E \perp OF \Rightarrow OO_1 \perp OO_2$.

Vậy, tam giác OO_1O_2 vuông cân tại O.

Dạng 6. Giá trị lớn nhất – Giá trị nhỏ nhất

Phương pháp: 1. Xác định phép quay Q(O ; φ).
2. Áp dụng tính chất của phép quay.
3. Áp dụng bất đẳng thức trong tam giác.

Bài 12. Cho tam giác ABC, M là điểm tuỳ ý trong tam giác. Xác định vị trí của điểm M sao cho MA + MB + MC đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

Xét phép quay $Q(B ; 60^0)$: $M \to M' \Rightarrow BM = BM'$ và $\widehat{MBM'} = 60^0$

$\Rightarrow \Delta BMM'$ đều $\Rightarrow BM = MM'$ và $\widehat{BMM'} = 60^0$.

Mặt khác: $Q(B ; 60^0)$: $C \to C' \Rightarrow MC = M'C'$ và $(MC, M'C') = 60^0$

Ta có: $MA + MB + MC = MA + MM' + M'C' \geq AC'$

MA + MB + MC đạt giá trị nhỏ nhất khi $MA + MB + MC = AC'$

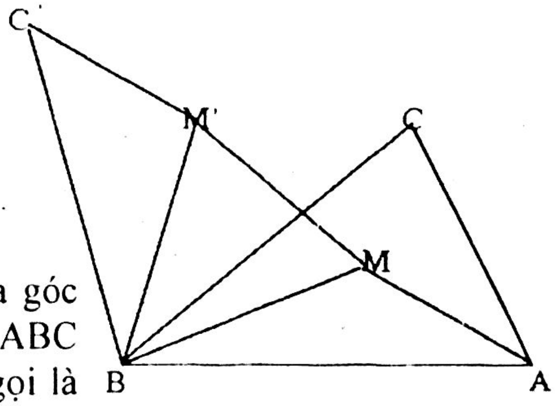
Suy ra: A, M, M', C' thẳng hàng.

$\Rightarrow (MC, M'C') = (MC, MM') = 60^0$

$\Rightarrow \widehat{BMC} = \widehat{BMM'} + \widehat{M'MC} = 120^0$

$\widehat{BMA} = \widehat{BM'M} + \widehat{MBM'} = 120^0$

$\widehat{AMC} = 360^0 - (\widehat{BMA} + \widehat{BMC}) = 120^0$



Vậy, M là giao điểm của ba cung chứa góc 120^0 dựng trên ba cạnh của tam giác ABC (Điểm M được xác định như trên còn gọi là điểm Tôrixeli)

Bài 13. Cho tam giác đều ABC và một điểm M bất kì. Chứng minh $BM \leq CM + AM$. Khi nào thì dấu đẳng thức xảy ra?

Giải

Xét phép quay $Q(A ; 60^0)$: $M \to M'$

$\Rightarrow AM = AM'$ và $\widehat{MAM'} = 60^0 \Rightarrow AM = MM'$

Phép quay $Q(A ; 60^0)$: $C \to B \Rightarrow MC = BM'$

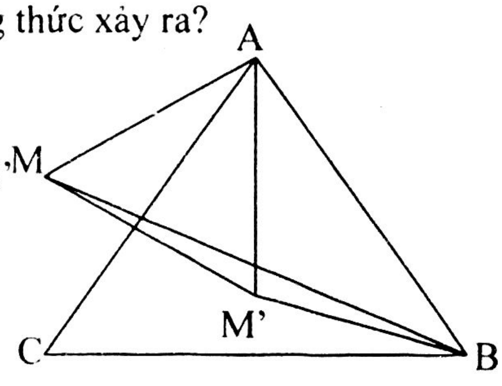
$BM \leq BM' + MM' = MC + AM$

$\Rightarrow BM \leq MC + AM$.

Dấu đẳng thức xảy ra thì $MC + AM = BM$

$\Rightarrow BM' + MM' = BM \Rightarrow$ B, M', M thẳng hàng.

$\Rightarrow \widehat{AMB} = 60^0 \Rightarrow$ M thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



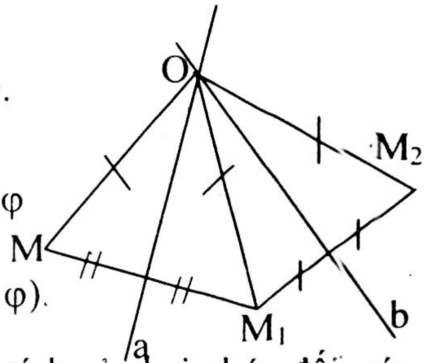
Dạng 7. Tích của các phép quay

Phương pháp:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & M' \arrow[r, mapsto, "g"] & M'' \end{tikzcd}$$

Bài 14. Chứng minh rằng tích của hai phép đối xứng trục có trục không song song là một phép quay.

Giải



Xét hai phép đối xứng trục D_a, D_b với a cắt b tại O.

Giả sử $M \xrightarrow{D_a} M_1 \xrightarrow{D_b} M_2$

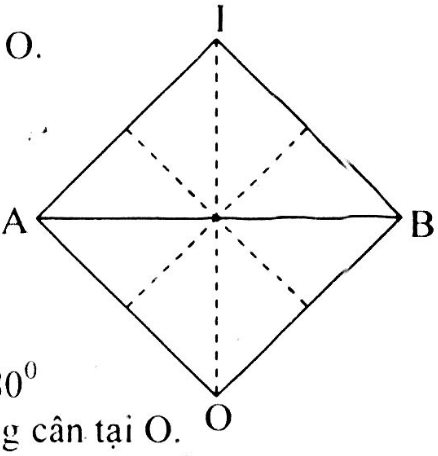
Thì $OM = OM_1 = OM_2$ và $(OM, OM_2) = 2(a, b) = \varphi$ với (a, b) là góc giữa hai đường thẳng a và b.

Suy ra: $Q(O\ ;\ \varphi): M \rightarrow M_2$. Vậy, $D_b \circ D_a = Q(O\ ;\ \varphi)$.

Nhận xét: Mọi phép quay $Q(O\ ;\ \varphi)$ có thể xem là tích của hai phép đối xứng trục D_a, D_b với a cắt b tại O là tâm quay, góc quay $\varphi = 2(a, b)$.

Bài 15. Cho hai phép quay Q_A, Q_B có tâm quay là A, B phân biệt và có cùng góc quay 90^0. Gọi $F = Q_A \circ Q_B$ và $F' = Q_B \circ Q_A$. Chứng minh rằng F, F' là những phép đối xứng tâm. Nêu rõ cách xác định tâm đối xứng của các phép đó.

Giải



Lấy điểm O sao cho tam giác OAB vuông cân tại O.

Ta có: $(OA, AB) = (OB, BA) = 45^0$.

Suy ra: $Q_A = Q(A\ ;\ 90^0) = D_{AO} \circ D_{AB}$

$Q_B = Q(B\ ;\ 90^0) = D_{BA} \circ D_{BO}$

$F = Q_A \circ Q_B = (D_{AO} \circ D_{AB}) \circ (D_{BA} \circ D_{BO})$

$= D_{AO} \circ \left(D_{AB} \circ D_{BA}\right) \circ D_{BO} = D_{AO} \circ D_{BO}$

$= Q(O\ ;\ 180^0)$ vì $\varphi = 2(OB, OA) = 2.90^0 = 180^0$

Tương tự, lấy điểm I sao cho tam giác OAB vuông cân tại O.

Khi đó: $Q_B = Q(B\ ;\ 90^0) = D_{BI} \circ D_{BA}$; $Q_A = Q(A\ ;\ 90^0) = D_{AB} \circ D_{AI}$

$F = Q_B \circ Q_A = (D_{BI} \circ D_{BA}) \circ (D_{AB} \circ D_{AI}) = D_{BI} \circ D_{AI} = Q(I\ ;\ 180^0)$

vì $\varphi = 2(IA, IB) = 2.90^0 = 180^0$.

Bài 16. Cho tam giác ABC. Dựng phía ngoài của tam giác các hình vuông BCMN, ACPQ có tâm O và O'.

a) Chứng minh rằng khi cố định hai điểm A, B và cho điểm C thay đổi thì các đường thẳng NQ luôn đi qua một điểm cố định.

b) Gọi I là trung điểm của AB. Chứng minh tam giác IOO' vuông cân.

Giải

a) Chứng minh đường thẳng NQ luôn đi qua một điểm cố định.

Ta có: (AQ, AC) = 90^0 ⇒ $Q_A = Q(A ; 90^0) = D_{AQ} \circ D_{AC}$

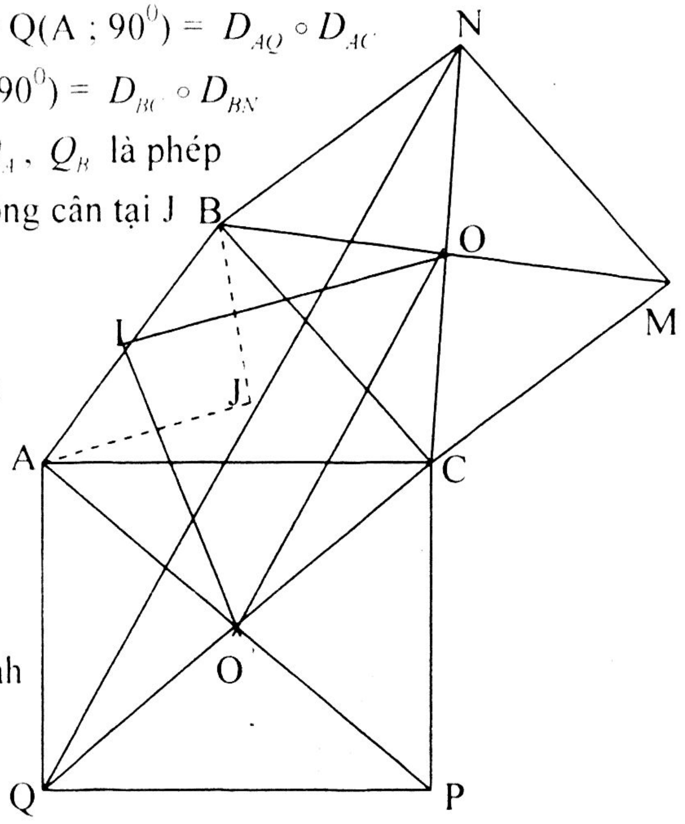
(BC, BN) = 90^0 ⇒ $Q_B = Q(B ; 90^0) = D_{BC} \circ D_{BN}$

Suy ra, tích của hai phép quay Q_A, Q_B là phép đối xứng tâm D_J với ΔABJ vuông cân tại J

Q_A : Q → C và Q_B : C → N

$\Rightarrow D_J : Q \rightarrow N \Rightarrow \overrightarrow{JQ} + \overrightarrow{JN} = \vec{o}$

Suy ra, đường thẳng NQ luôn đi qua một điểm cố định J.



b) Chứng minh tam giác IOO' vuông cân.

Q (C; 90^0): A → P, M → B

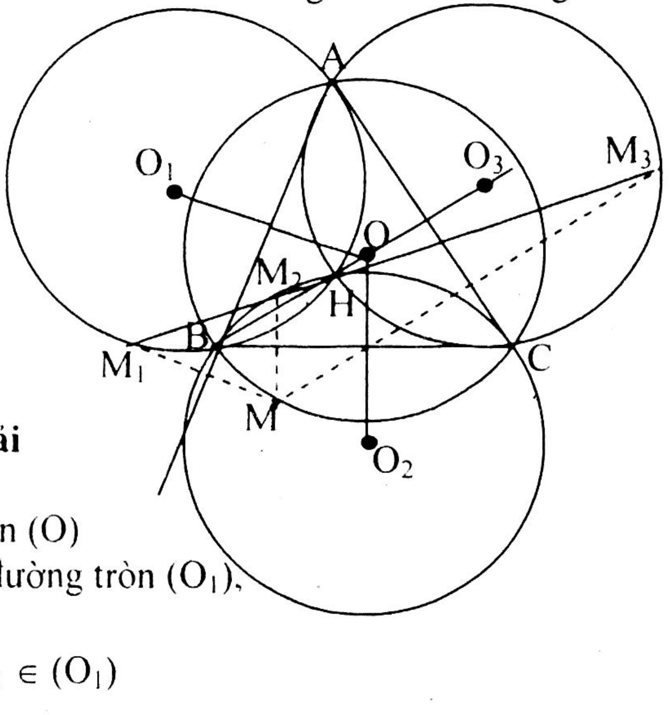
⇒ AM = PB và AM ⊥ PB (1)

Mặt khác, OI là đường trung bình của ΔAMB ⇒ OI // AM và OI = $\frac{1}{2}$ AM (2)

Tương tự, O'I là đường trung bình của ΔABP ⇒ O'I // BP và O'I = $\frac{1}{2}$ BP (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có: OI = O'I và OI ⊥ O'I nên tam giác IOO' vuông cân.

Bài 17. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), có trực tâm H và điểm M thuộc đường tròn (O). Gọi M_1, M_2, M_3 là các điểm lần lượt đối xứng với M qua các cạnh AB, BC, AC. Chứng minh các điểm M_1, M_2, M_3 và H thẳng hàng.
(Gọi là đường thẳng Steiner).



Giải

Gọi (O_1), (O_2), (O_3) lần lượt là các đường tròn đối xứng với đường tròn (O) qua các cạnh AB, BC, AC thì các đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) đi qua điểm H.

Ta có: M ∈ (O) nên $D_{AB} : M \rightarrow M_1 \in (O_1)$

$D_{BC} : M \rightarrow M_2 \in (O_2)$

$D_{AC} : M \rightarrow M_3 \in (O_3)$.

Xét tích $D_{AC} \circ D_{AB} = Q(A ; \varphi)$ với $\varphi = 2(AB, AC)$

$Q(A\,;\varphi)$: $M_1 \rightarrow M_3 \Rightarrow (O_1) \rightarrow (O_3)$ và $(O_1) = (O_3)$

$\Rightarrow AM_1 = AM_3 \Rightarrow \overset{\frown}{AM_1} = \overset{\frown}{AM_3} \Rightarrow \widehat{M_1HA} + \widehat{AHM_3} = \pi \Rightarrow M_1, H, M_3$ thẳng hàng.

Tương tự, ta cũng chứng minh được M_1, H, M_2 thẳng hàng.

Suy ra, M_1, M_2, M_3 và H thẳng hàng.

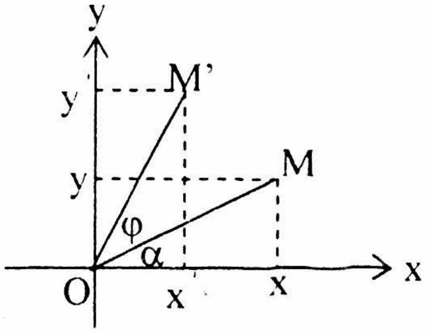
Dạng 8. Biểu thức giải tích của phép quay

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy xét phép quay $Q(I\,;\varphi)$

Trường hợp 1: Khi tâm quay I trùng với gốc tọa độ O.

$Q(O;\varphi)$: $M(x\,;y) \rightarrow M'(x'\,;y')$

Đặt $OM = r$ và $(Ox, OM) = \alpha$.



Ta có: $M\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{cases}$

$(Ox, OM') = \alpha + \varphi \Rightarrow M'\begin{cases} x' = r\cos(\alpha+\varphi) \\ y' = r\sin(\alpha+\varphi) \end{cases}$

$$\Rightarrow M'\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases} \quad (1)$$

$$Q(O;-\varphi): M'(x'\,;y') \rightarrow M(x\,;y) \Rightarrow M\begin{cases} x = x'\cos\varphi + y'\sin\varphi \\ y = -x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{cases} \quad (2)$$

Các công thức (1) và (2) được tóm tắt ở bảng sau:

	x	y
x	cosφ	sinφ
y	– sinφ	cosφ

Trường hợp 2: Khi tâm quay I $(x_0\,;y_0)$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x' - x_0 = (x - x_0)\cos\varphi - (y - y_0)\sin\varphi \\ y' - y_0 = (x - x_0)\sin\varphi + (y - y_0)\cos\varphi \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x - x_0 = (x' - x_0)\cos\varphi + (y' - y_0)\sin\varphi \\ y - y_0 = -(x' - x_0)\sin\varphi + (y' - y_0)\cos\varphi \end{cases} \quad (4)$$

Công thức (3) và (4) được tóm tắt ở bảng sau:

	$x - x_0$	$y - y_0$
$x - x_0$	cosφ	sinφ
$y - y_0$	– sinφ	cosφ

Bài 18. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho phép quay tâm **O**, góc quay $\frac{\pi}{4}$. Tìm ảnh qua phép quay Q (O ; $\frac{\pi}{4}$):

a) Điểm A (2 ; 2). b) Đường tròn (C): $(x-1)^2 + y^2 = 4$.

Giải

Biểu thức giải tích của phép quay Q (O; $\frac{\pi}{4}$): M (x ; y) → M' (x' ; y')

$$\begin{cases} x' = x\cos\frac{\pi}{4} - y\sin\frac{\pi}{4} \\ y' = x\sin\frac{\pi}{4} + y\cos\frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases}$$

a) Q (O ; $\frac{\pi}{4}$): A (2 ; 2) → A' (x' ; y') thì $\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}.2 - \frac{\sqrt{2}}{2}.2 = 0 \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}.2 + \frac{\sqrt{2}}{2}.2 = 2\sqrt{2} \end{cases}$

Vậy. A' $\left(0 ; 2\sqrt{2}\right)$

b) Đường tròn (C): $(x-1)^2 + y^2 = 4$ có tâm I (1 ; 0) và bán kính R = 2

Q (O ; $\frac{\pi}{4}$): I (1 ; 0) → I' (x' ; y') ⇒ Q (O ; $\frac{\pi}{4}$): (C) → (C') với (C') là đường tròn tâm I' và có bán kính R = 2.

Ta có I' $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ nên phương trình của đường tròn (C') là:

$$\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 4.$$

Bài 19. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho phép biến hình f có biểu thức giải tích: $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$. f là phép gì?

Giải

Ta có f: M(x ; y) → M'(x' ; y') với

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x\cos\dfrac{\pi}{3} - y\sin\dfrac{\pi}{3} \\ y' = x\sin\dfrac{\pi}{3} + y\cos\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

Suy ra, f là phép quay tâm O, góc quay $\dfrac{\pi}{3}$.

Bài 20 (Khối B - 2007) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy, cho điểm A (2 ; 2) và các đường thẳng: d_1: x + y − 2 = 0, d_2: x + y − 8 = 0.
Tìm tọa độ các điểm B và C lần lượt thuộc d_1 và d_2 sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

Giải

Phép quay Q (A; 90^0), Q (A; − 90^0) có biểu thức giải tích là:

$$\begin{cases} x' = -y + 4 \\ y' = x \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x' = y \\ y' = -x + 4 \end{cases}$$

Phép quay Q (A; 90^0): d_1 → a_1, phương trình đường thẳng a_1: x − y − 2 = 0.
Q (A; 90^0): B ∈ d_1 → C∈a_1 và C ∈ d_2 nên tọa độ của C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x + y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow C\ (5\ ;\ 3)\ .$$

Q (A; − 90^0) : C → B thì B(3 ; − 1)∈ d_1.
Phép quay Q (A; − 90^0): d_1 → a_2, phương trình đường thẳng a_2: x − y − 2 = 0
Q (A; − 90^0) B ∈ d_2 → C ∈ a_2 nên tọa độ của C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow C(3\ ;\ 5).$$

Q (A; 90^0): C → B thì B (− 1 ; 3) ∈ d_1.
Vậy B (− 1 ; 3), C(3 ; 5) hoặc B (3 ; − 1), C (5 ; 3).

BÀI TẬP

Bài 1. Cho hình vuông ABCD cạnh bằng $\sqrt{2}$ và có các đỉnh vẽ theo chiều dương. Các đường chéo cắt nhau tại I. Trên cạnh BC lấy điểm J sao cho BJ = 1. Xác định phép quay biến $\overrightarrow{AI}$ thành $\overrightarrow{BJ}$.

Bài 2. Cho hai đường tròn (O, R) và (O' R) cắt nhau ở M, N. Qua M vẽ ba đường thẳng lần lượt cắt đường tròn (O, R) tại A, B, C và (O' R') tại A', B', C'. Xác định phép quay biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C'.

Bài 3. Cho đường tròn (O) và điểm I không nằm trên đường tròn. Với mỗi điểm A thay đổi trên đường tròn, xét hình vuông ABCD có tâm I. Tìm quỹ tích các điểm B, C, D.

Bài 4. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB = 2R và M là điểm chuyển động trên nửa đường tròn đó. Dựng phía ngoài tam giác AMB một hình vuông MBCD.

a) Tìm quỹ tích của điểm C.

b) Trên tia Bx vuông góc với AB tại B và nằm cùng phía với nửa đường tròn lấy điểm O' sao cho BO' = BO. Chứng minh OM vuông góc với O'C.

Bài 5. Cho hình vuông ABCD có tâm O và M, N lần lượt thuộc các cạnh BC, CD. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của B lên các đường thẳng AM, AN. Gọi I, J lần lượt là hình chiếu của D lên các đường thẳng AM, AN.

a) Xác định phép quay biến ADJ thành tam giác BAF.

b) Xác định ảnh của tam giác BAE.

c) Chứng minh EF vuông góc với IJ.

Bài 6. Cho tam giác đều ABC và một điểm M sao cho $\widehat{AMB} = 120^0$, AM = 1, BM = 2. Tính độ dài đoạn thẳng CM.

Bài 7. Cho tứ giác ABCD có AC vuông góc với CD và AC = CD, AB = 1, BC = $\sqrt{2}$, CD = $\sqrt{3}$. Tính các góc của tứ giác.

Bài 8. Cho đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC. Các tiếp điểm thuộc AB, BC, CA lần lượt là I, J, K. Chứng minh $\overrightarrow{OA}\sin A + \overrightarrow{OB}\sin B + \overrightarrow{OC}\sin C = \vec{0}$

Bài 9. Cho tam giác ABC có góc A nhọn. Dựng phía ngoài tam giác ABC các hình vuông ABMN, ACPQ, BCEF.

a) Chứng minh BQ = CN và BQ vuông góc với CN.

b) Gọi D là trung điểm của BC và K, H, G theo thứ tự là tâm các hình vuông ABMN, ACPQ, BCEF. Chứng minh ΔDKH vuông cân và KH = AG.

Bài 10. Cho hai hình vuông có tâm trùng nhau. Tìm chu vi bé nhất của giao hai hình vuông trên.

Bài 11. Cho tam giác ABC có đỉnh A cố định và hai điểm B, C thay đổi sao cho AB = 2, AC = 5. Dựng tam giác đều BCD sao cho D nằm khác phía với A đối với đường thẳng BC. Xác định góc $\varphi = \widehat{BAC}$ để AD có độ dài lớn nhất.

Bài 12. Cho góc nhọn $\widehat{AOx}$. Dựng một hình vuông ABCD sao cho điểm O nằm trên cạnh BC và O nằm trên đường phân giác của góc $\widehat{BAE}$ với E là giao điểm của Ox với CD.

Bài 13. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho phép biến hình f xác định bởi:
$$\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{1}{2}y + 1 \\ y' = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y - 2 \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng f là một phép quay, xác định tâm và góc quay của f.

b) Phân tích phép quay f thành tích của một phép quay và một phép tịnh tiến. Xác định biểu thức của phép quay và phép tịnh tiến đó.

Bài 14. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho phép quay Q (O ; 45^0).

a) Viết biểu thức giải tích của phép quay đó.

b) Viết phương trình của đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C):

$x^2 + y^2 - 6x + 6y + 14 = 0$ qua phép quay Q (O ; 45^0).

§4. PHÉP VỊ TỰ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa: Cho điểm O cố định và một số k không đổi, $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ được gọi là phép vị tự tâm O, tỉ số k.

Kí hiệu: V(O ; k)

V(O ; k): M → M' ⇔ $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$

* Khi k > 0, M và M' nằm cùng phía đối với điểm O

* Khi k < 0, M và M' nằm khác phía đối với điểm O

* Khi k = –1, M và M' đối xứng nhau qua tâm O nên **V (O ; -1) = D_O**

* Khi k = 1, thì M ≡ M' nên **V (O ; 1) = id.**

2. Tính chất:

Định lí 1: Nếu phép vị tự tỉ số k biến hai điểm M, N lần lượt thành hai điểm M', N' thì $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ và $M'N' = |k|MN$.

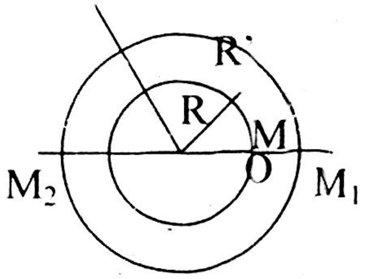
Định lí 2: Phép vị tự biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm đó.

Hệ quả: Phép vị tự tỉ số k biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đó, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng mà độ dài được nhân với $|k|$, biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số đồng dạng là $|k|$, biến góc thành góc bằng nó.

Định lí 3: Phép vị tự biến đường tròn thành đường tròn.

3. Tâm vị tự của hai đường tròn.

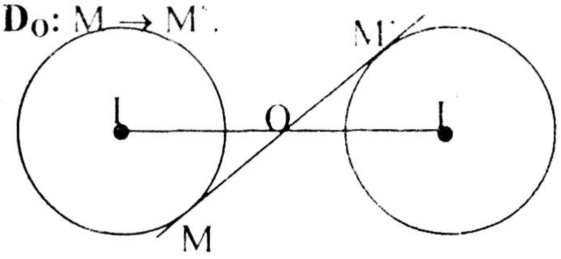
* Khi hai đường tròn (I; R) và (I'; R') đồng tâm

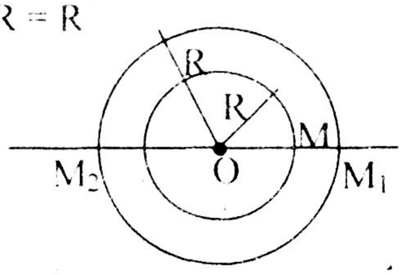


$V\left(O;\frac{R'}{R}\right)$: M → M_1 và $V\left(O;-\frac{R'}{R}\right)$: M → M_2

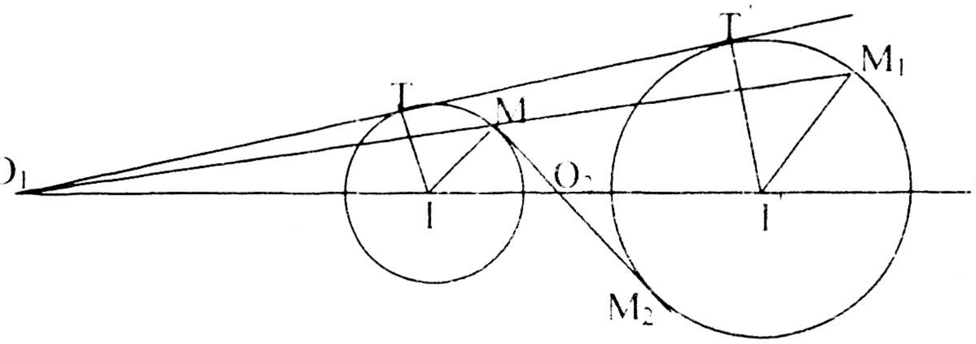
* Khi hai đường tròn (I ; R) và (I' ; R') cùng bán kính R = R'

V (O ; -1) = D$_O$: M → M'.





* Khi hai đường tròn (I; R) và (I' ; R') với I không trùng I' và R ≠ R'



$V\left(O_1;\frac{R'}{R}\right)$: M → M$_1$ và $V\left(O_2;-\frac{R'}{R}\right)$: M → M$_2$

* Phép vị tự tâm O biến đường tròn này thành đường tròn kia thì O được gọi là tâm vị tự của hai đường tròn đó.

* Nếu phép vị tự đó có tỉ số dương thì điểm O gọi là tâm vị tự ngoài, nếu vị tự đó có tỉ số âm thì điểm O gọi là tâm vị tự trong

B. CÁC DẠNG TOÁN.

Dạng 1. Xác định phép vị tự

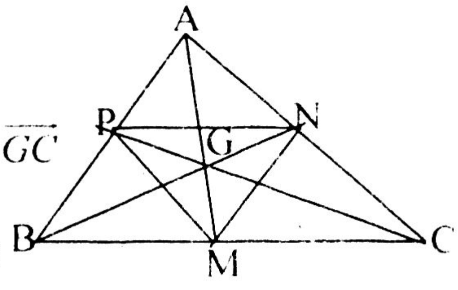
Phương pháp: 1. Phép biến hình f: A → A' và M → M'

2. $\overrightarrow{A'M'} = k\overrightarrow{AM}$ với k ≠ 0 và k ≠ 1.

3. f là phép vị tự V (O; k) với tâm O là giao điểm của hai đường thẳng AA' và MM'.

Bài 1. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AC và AB. Chứng minh rằng có một phép vị tự biến tam giác ABC thành tam giác MNP.

Giải

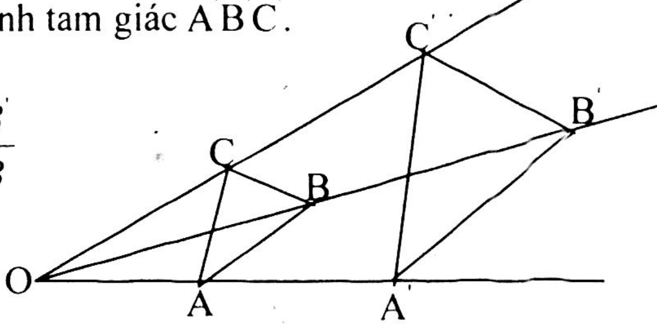


Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, khi đó:

$$\overrightarrow{GM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}\ ;\quad \overrightarrow{GN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}\ ;\quad \overrightarrow{GP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$$

Suy ra, phép vị tự tâm G, tỉ số $k = -\frac{1}{2}$ biến tam giác ABC thành tam giác MNP.

Bài 2. Cho hai tam giác ABC và A'B'C' có AB // A'B', BC // B'C' và AC // A'C' sao cho các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy tại O. Chứng minh rằng có một phép vị tự biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C'.



Giải

Ta có: AB // A'B' ⇒ $\frac{OB'}{OB}=\frac{OA'}{OA}=\frac{A'B'}{AB}$

BC // B'C' ⇒ $\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}=\frac{B'C'}{BC}$

AC // A'C' ⇒ $\frac{OC'}{OC}=\frac{OA'}{OA}=\frac{A'C'}{AC}$

Suy ra: $\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}=\frac{A'B'}{AB}=k$ với k > 0 ⇒ $\frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}}=\frac{\overrightarrow{OB'}}{\overrightarrow{OB}}=\frac{\overrightarrow{OC'}}{\overrightarrow{OC}}=k$

Suy ra: V (O ; k): Δ ABC →Δ A'B'C'

Dạng 2. Áp dụng phép vị tự vào chứng minh

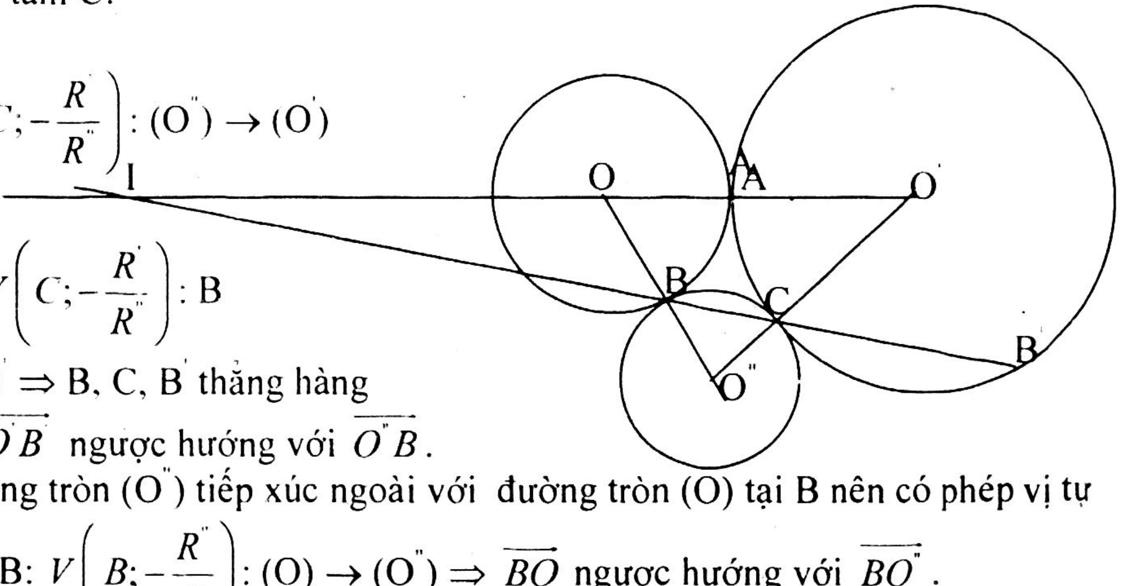
Phương pháp: 1. Xác định phép vị tự V (O; k).
2. Áp dụng tính chất của phép vị tự.

Bài 3. Cho hai đường tròn (O) và (O') có bán kính khác nhau, tiếp xúc ngoài tại A. Một đường tròn (O'') tiếp xúc ngoài với hai đường tròn (O) và (O') lần lượt tại B, C. Chứng minh rằng đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định.

Giải

Ta có: Đường tròn (O'') tiếp xúc ngoài với đường tròn (O') tại C nên có phép vị tự tâm C:

$V\left(C;-\frac{R'}{R''}\right):(O'')\to(O')$



$\Rightarrow V\left(C;-\frac{R'}{R''}\right):B$

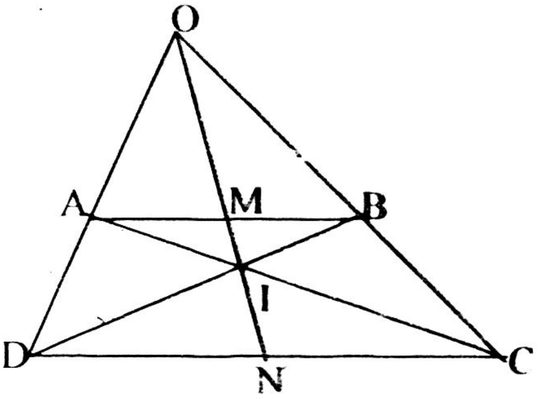
$\to B' \Rightarrow$ B, C, B' thẳng hàng

và $\overrightarrow{O'B'}$ ngược hướng với $\overrightarrow{O''B}$.

Đường tròn (O'') tiếp xúc ngoài với đường tròn (O) tại B nên có phép vị tự tâm B: $V\left(B;-\frac{R''}{R}\right):(O)\to(O'')\Rightarrow\overrightarrow{BO}$ ngược hướng với $\overrightarrow{BO''}$.

Suy ra: $\overrightarrow{O'B'}$ cùng hướng với $\overrightarrow{OB}$. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng OO' và BB' thì $\overrightarrow{IO'} = \frac{R'}{R}\overrightarrow{IO}$ ⇒ I cố định. Vậy đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 4. Cho hình thang ABCD (AB // CD). Chứng minh rằng các trung điểm của hai đáy, giao của hai đường chéo, giao của hai đường thẳng chứa hai cạnh bên hình thang thẳng hàng.



Giải

Ta có: AB // CD ⇒ $\frac{OA}{OD} = \frac{OM}{ON} = \frac{AB}{DC}$

$\Rightarrow V\left(O;\frac{AB}{DC}\right): M \to N$

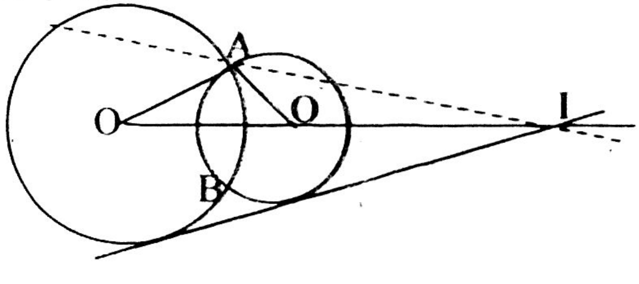
⇒ O, M, N thẳng hàng. (1)

Ta có: AB // CD ⇒ $\frac{AB}{DC} = \frac{IB}{ID} = \frac{IA}{IC} = \frac{IM}{IN}$

$\Rightarrow V\left(I;-\frac{DC}{AB}\right): M \to N$ ⇒ I, M, N thẳng hàng. (2).

Từ (1) và (2) ta có O, M, N, I thẳng hàng.

Bài 5. Cho hai đường tròn (O ; R) và (O'; R') cắt nhau tại A và B. Tiếp tuyến chung của hai đường tròn cắt đường thẳng OO' tại I. Chứng minh rằng AI là phân giác ngoài góc $\widehat{OAO'}$ của tam giác OAO'.



Giải

Ta có: $\frac{IO'}{IO} = \frac{R'}{R}$, Xét phép vị tự

$V\left(I;\frac{R'}{R}\right): O \to O' \Rightarrow \overrightarrow{IO'} = \frac{R'}{R}\overrightarrow{IO}$

$\Rightarrow \frac{IO'}{IO} = \frac{R'}{R} = \frac{AO'}{AO}$ ⇒ AI là phân giác ngoài góc $\widehat{OAO'}$ của tam giác OAO'.

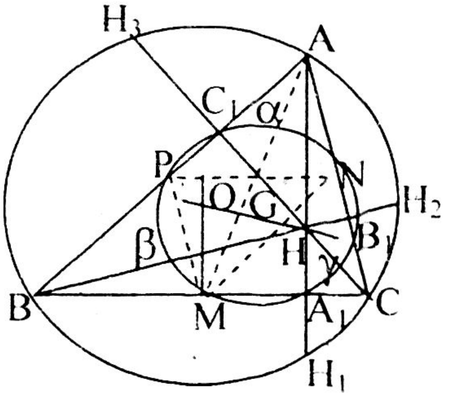
Bài 6. (Đường thẳng Euler – đường tròn Euler).

Cho M, N, P lần lượt là trung điểm ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC. H, G, O lần lượt là trực tâm, trọng tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP.

a) Chứng minh bốn điểm H, G, O và I thẳng hàng (đường thẳng đi qua ba điểm H, G, O gọi là đường thẳng Euler).

b) Chứng minh các điểm M, N, P; chân các đường cao và các trung điểm các đoạn thẳng HA, HB, HC ở trên một đường tròn (gọi là đường tròn Euler).

Giải



a) Phép vị tự $V\left(G;-\frac{1}{2}\right)$: ΔABC → ΔMNP

Ta có: PN // BC, MO ⊥ BC ⇒ MO ⊥ PN

PM // AC, NO ⊥ AC ⇒ NO ⊥ PM

⇒ O là trực tâm của ΔMNP

$V\left(G;-\frac{1}{2}\right)$: H → O ⇒ $\overrightarrow{GO}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$

⇒ H, G, O thẳng hàng (1)

Ta có I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP nên $V\left(G;-\frac{1}{2}\right)$: O → I

⇒ $\overrightarrow{GI}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GO}$ ⇒ I, G, O thẳng hàng (2)

Từ (1) và (2) ta có bốn điểm H, G, O và I thẳng hàng.

b) Ta có: $V\left(G;-\frac{1}{2}\right)$: H → O, O → I ⇒ $\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{HO}\Rightarrow\overrightarrow{OH}=2\overrightarrow{OI}$ ⇒ I là trung điểm của OH ⇒ $V\left(H;\frac{1}{2}\right)$: (O) → (I).

Gọi α, β, γ lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng HA, HB, HC và H₁, H₂, H₃ đối xứng với H qua BC, AC và AB ; A₁, B₁, C₁ chân đường cao hạ từ đỉnh A, B, C.

Ta có: A, B, C thuộc đường tròn (O) $\xrightarrow{V\left(H;\frac{1}{2}\right)}$ α, β, γ thuộc đường tròn (I).

Ta có: H₁, H₂, H₃ đối xứng với H qua BC, AC và AB thì H₁, H₂, H₃ thuộc đường tròn (O) $\xrightarrow{V\left(H;\frac{1}{2}\right)}$ A₁, B₁, C₁ thuộc đường tròn (I).

Suy ra, đường tròn (I) đi qua chín điểm M, N, P, A₁, B₁, C₁ và α, β, γ.

Bài 7. Cho tam giác ABC, trên cạnh AB lấy các điểm M, N sao cho AM = MN = NB.

Gọi A₁, B₁ lần lượt là trung điểm các cạnh BC, AC và P là giao điểm của hai đường thẳng AA₁, CM. Chứng minh PK // AB.

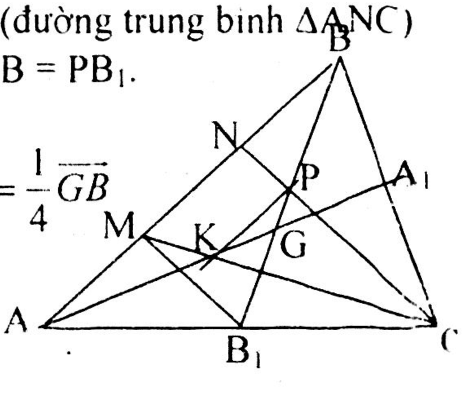
Giải

Ta có: AM = MN và AB₁ = CB₁, MB₁ // NC (đường trung bình ΔANC)

⇒ NP là đường trung bình của ΔBMB₁ ⇒ PB = PB₁.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC thì:

$$\overrightarrow{GP}=\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1}=-\frac{1}{6}\overrightarrow{BB_1}=\frac{1}{4}\overrightarrow{GB}$$



Tương tự, $\overrightarrow{GK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GA}$.

Phép vị tự $V\left(G;\frac{1}{4}\right)$: B → P, A → K ⇒ $\overrightarrow{PK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$ ⇒ PK // AB.

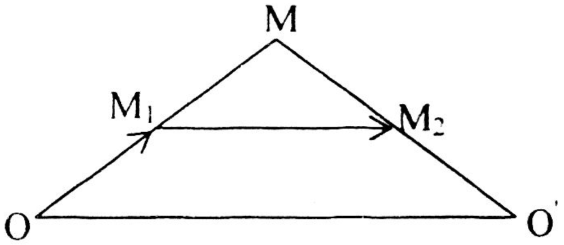
Dạng 3. Tích của các phép vị tự

Phương pháp:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & M' \arrow[r, mapsto, "g"] & M'' \end{tikzcd}$$

1. Tích của phép vị tự và phép tịnh tiến.

Cho phép vị tự V(O ; k) với k ≠ 1 và phép tịnh tiến $T_{\vec v}$. Chứng minh rằng $T_{\vec v} \circ V(O;k)$ và $V(O;k) \circ T_{\vec v}$ là một phép vị tự. Xác định tâm và tỉ số của các phép vị tự đó.



Trường hợp 1 $\quad T_{\vec v} \circ V(O;k)$

Giả sử $M \xrightarrow{V(O;k)} M_1 \xrightarrow{T_{\vec v}} M_2$

Ta có: $\overrightarrow{OM_1} = k\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec v$.

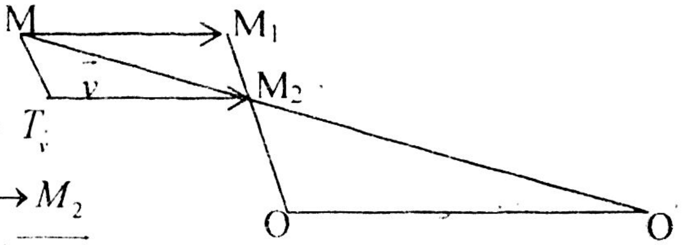
Gọi O' là giao điểm của đường thẳng MM₂ và đường thẳng đi qua O, có phương $\vec v$. Ta có $\frac{\overline{O'M_2}}{\overline{O'M}} = \frac{\overline{OM_1}}{\overline{OM}} = k \Rightarrow \overrightarrow{O'M_2} = k\overrightarrow{O'M}$ (1)

$$\text{Mặt khác } \frac{\overline{OO'}}{\vec v} = \frac{\overline{OO'}}{\overline{M_1M_2}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{M_1M}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OM}-\overline{OM_1}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OM}-k\overline{OM}} = \frac{1}{1-k}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{OO'} = \frac{1}{1-k}\vec v$ (2) thì O' cố định.

Từ (1) và (2) ta có: $T_{\vec v} \circ V(O;k) = V(O';k)$

với $\overrightarrow{OO'} = \frac{1}{1-k}\vec v$



Trường hợp 2 $\quad V(O;k) \circ T_{\vec v}$

Giả sử $M \xrightarrow{T_{\vec v}} M_1 \xrightarrow{V(O;k)} M_2$

Ta có: $\overrightarrow{MM_1} = \vec v$ và $\overrightarrow{OM_2} = k\overrightarrow{OM_1}$

Gọi O' là giao điểm của đường thẳng MM₂ và đường thẳng đi qua O, có phương $\vec v$. Ta có $\frac{\overline{O'M_2}}{\overline{O'M}} = \frac{\overline{OM_2}}{\overline{OM_1}} = k \Rightarrow \overrightarrow{O'M_2} = k\overrightarrow{O'M}$ (3)

$$\text{Mặt khác } \frac{\overline{OO'}}{\vec v} = \frac{\overline{OO'}}{\overline{MM_1}} = \frac{\overline{OM_2}}{\overline{M_2M_1}} = \frac{\overline{OM_2}}{\overline{OM_1}-\overline{OM_2}} = \frac{\overline{OM_2}}{\frac{1}{k}\overline{OM_2}-\overline{OM_2}} = \frac{k}{1-k}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{OO'} = \frac{k}{1-k}\vec{v}$ (4) thì O' cố định.

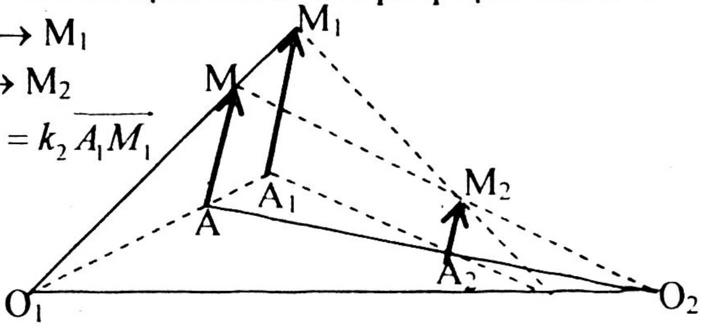
Từ (3) và (4) ta có: V(O ; k)$\circ T_{\vec{v}}$ = V(O' ; k) với $\overrightarrow{OO'} = \frac{k}{1-k}\vec{v}$

2. Tích của hai phép vị tự.

Cho hai phép vị tự V(O_1 ; k_1), V(O_2 ; k_2) với $k_1 \neq 1$, $k_2 \neq 1$. Chứng minh **rằng tích của hai phép** vị tự trên là:

a) Một phép vị tự khi $k_1k_2 \neq 1$. Xác định tâm của phép vị tự đó.

b) Một phép tịnh tiến khi $k_1k_2 = 1$. Xác định véc tơ của phép tịnh tiến đó.



Giả sử V(O_1 ; k_1): A → A_1, M → M_1

V(O_2 ; k_2): A_1→ A_2, M_1 → M_2

Ta có: $\overrightarrow{A_1M_1} = k_1\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{A_2M_2} = k_2\overrightarrow{A_1M_1}$

$\Rightarrow \overrightarrow{A_2M_2} = k_1k_2\overrightarrow{AM}$

a) Khi $k_1k_2 \neq 1$ Đặt $k_1k_2 = k$

Khi đó có một phép vị tự V(O ; k): $\overrightarrow{AM} \rightarrow \overrightarrow{A_2M_2}$.

*** Xác định tâm O** của phép vị tự V (O; k)

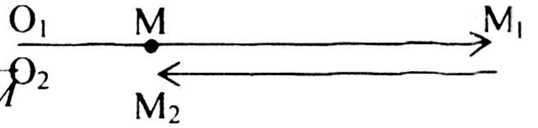
V (O_1 ; k_1): O→ I và V (O_2 ; k_2): I → O (Tâm vị tự là điểm kép)

Suy ra: $\overrightarrow{O_1I} = k_1\overrightarrow{O_1O}$ và $\overrightarrow{O_2O} = k_2\overrightarrow{O_2I}$

$\Rightarrow \overrightarrow{O_2O_1} + \overrightarrow{O_1O} = \overrightarrow{O_2O} = k_2(\overrightarrow{O_2O_1} + \overrightarrow{O_1I})$ (*)

Thay $\overrightarrow{O_1I} = k_1\overrightarrow{O_1O}$ vào (*), ta có $\overrightarrow{O_2O_1} + \overrightarrow{O_1O} = k_2(\overrightarrow{O_2O_1} + k_1\overrightarrow{O_1O})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{O_1O} = \frac{1-k_2}{1-k_1k_2}\overrightarrow{O_1O_2}$ Suy ra O, O_1, O_2 thẳng hàng và O cố định



b) Khi $k_1k_2 = 1$: * Nếu $O_1 \equiv O_2$

thì V(O_1 ; k_1): M → M_1 $\Leftrightarrow \overrightarrow{O_1M_1} = k_1\overrightarrow{O_1M}$

V(O_1 ; k_2): M_1 → M_2 $\Leftrightarrow \overrightarrow{O_1M_2} = k_2\overrightarrow{O_1M_1}$

$\overrightarrow{O_1M_2} = k_2\overrightarrow{O_1M_1} = k_1k_2\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1M} \Leftrightarrow \overrightarrow{O_1M_2} - \overrightarrow{O_1M} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MM_2} = \vec{0}$ ⇔ M ≡ M_2.

Suy ra: Tích của hai phép vị tự V (O_1 ; k_1), V (O_1 ; k_2) là phép đồng nhất id.

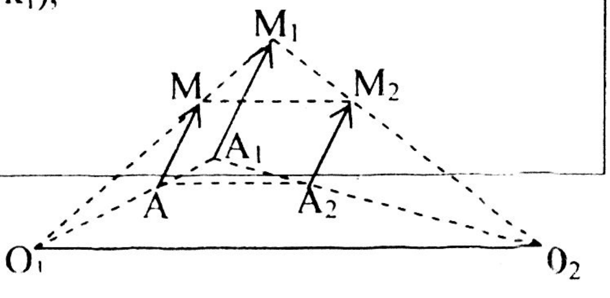
*** Nếu O_1 không trùng** với O_2.

Ta có $\overrightarrow{A_2M_2} = \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA_2} = \overrightarrow{MM_2}$

Suy ra: Tích của hai phép vị tự V (O_1 ; k_1),

V (O_1 ; k_2) là phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{AA_2}$.

Nhận xét



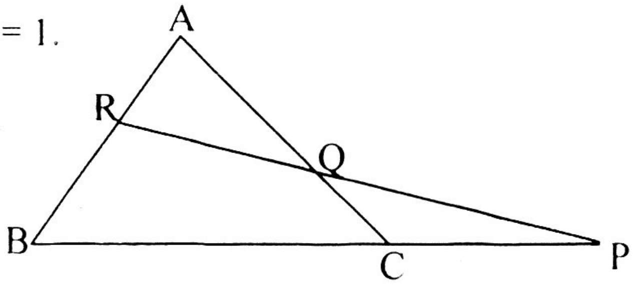
1. Tích của một phép vị tự và một phép tịnh tiến là một phép vị tự.

2. Tích của hai phép vị tự V $(O_1 ; k_1)$, V $(O_1 ; k_2)$:

* Nếu $k_1k_2 \neq 1$ thì tích là một phép vị tự tỉ số $k = k_1k_2$ và tâm O thẳng hàng với O_1, O_2 nếu O_1, O_2 phân biệt; trùng với O_1 và O_2 nếu $O_1 \equiv O_2$.

* Nếu $k_1k_2 = 1$ thì tích là một phép tịnh tiến nếu O_1 không trùng với O_2; một phép đồng nhất nếu $O_1 \equiv O_2$.

Bài 8. (Định lí Menelauyt) Gọi P, Q, R là ba điểm lần lượt nằm trên ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để P, Q, R thẳng hàng là $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}}\dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}}\dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$.



Giải

Xét các phép vị tự:

$$V_1 = V\left(P;\frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}\right): B \to C$$

$$V_2 = V\left(Q;\frac{\overline{QA}}{\overline{QC}}\right): C \to A .$$

Suy ra: Tích của hai phép vị tự V_1 và V_2 biến B → A

Nếu $\dfrac{\overline{PC}}{\overline{PB}}.\dfrac{\overline{QA}}{\overline{QC}} = 1 \Rightarrow \dfrac{\overline{PC}}{\overline{PB}} = \dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \Rightarrow PQ // AB$ (trái với giả thiết).

vậy $\dfrac{\overline{PC}}{\overline{PB}}.\dfrac{\overline{QA}}{\overline{QC}} \neq 1$ nên tích của hai phép vị tự V_1 và V_2 là một phép vị tự có tâm thuộc đường thẳng PQ.

* Điều kiện cần Nếu P, Q, R thẳng hàng

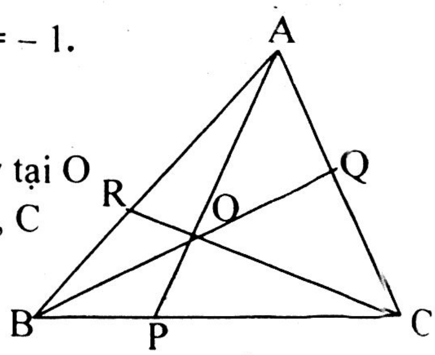
Xét phép vị tự $V\left(R;\dfrac{\overline{PC}}{\overline{PB}}.\dfrac{\overline{QA}}{\overline{QC}}\right): B \to A$

$$\Rightarrow \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}.\frac{\overline{QA}}{\overline{QC}} \Leftrightarrow \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}.\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}.\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$$

* Điều kiện đủ Giả sử $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}}\dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}}\dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \dfrac{\overline{PC}}{\overline{PB}}\dfrac{\overline{QA}}{\overline{QC}}$

Khi đó: $V\left(R;\dfrac{\overline{PC}}{\overline{PB}}.\dfrac{\overline{QA}}{\overline{QC}}\right)$: $B \to A$ suy ra $V\left(R;\dfrac{\overline{PC}}{\overline{PB}}.\dfrac{\overline{QA}}{\overline{QC}}\right)$ là tích của hai phép vị tự V_1 và V_2 nên $R \in PQ$.

Bài 9. (Định lí Ceva). Gọi P, Q, R là ba điểm lần lượt nằm trên ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để ba đường thẳng AP, BQ, CR đồng quy là $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1$.



Giải

* Điều kiện cần: Giả sử AP, BQ, CR đồng quy tại O

Trong ΔABP, theo định lí Menelauyt khi R, O, C thẳng hàng thì $\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}}\frac{\overline{CB}}{\overline{CP}}\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} = 1$ (*)

Tương tự, trong ΔACP, theo định lí Menelauyt khi Q, O, B thẳng hàng thì

$\frac{\overline{OA}}{\overline{OP}}\frac{\overline{BP}}{\overline{BC}}\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = 1$ (* *)

Nhân (*) và (**) vế theo vế:

$$\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}}\frac{\overline{CB}}{\overline{CP}}\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}}\frac{\overline{OA}}{\overline{OP}}\frac{\overline{BP}}{\overline{BC}}\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1$$

* Điều kiện đủ: Gọi O là giao điểm của AP và BQ.

Trong ΔACP, theo định lí Menelauyt khi Q, O, B thẳng hàng thì

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OP}}\frac{\overline{BP}}{\overline{BC}}\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = 1 \ (1)$$

Mặt khác: $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1$ (2). Từ (1) và (2) chia vế theo vế ta có:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OP}}\frac{\overline{BP}}{\overline{BC}}\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}\frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}\frac{\overline{QA}}{\overline{QC}}\frac{\overline{RB}}{\overline{RA}} = -1 \Leftrightarrow \frac{\overline{RB}}{\overline{RA}}\frac{\overline{OA}}{\overline{OP}}\frac{\overline{CP}}{\overline{CB}} = 1.$$

Suy ra: R, O, C thẳng hàng. Vậy AP, BQ, CR đồng quy tại O.

Dạng 4. Tìm quỹ tích (Tập hợp điểm) bằng phép vị tự

Phương pháp: 1. Xác định phép vị tự biến điểm M thành điểm M'.

2. Tìm quỹ tích của điểm M.

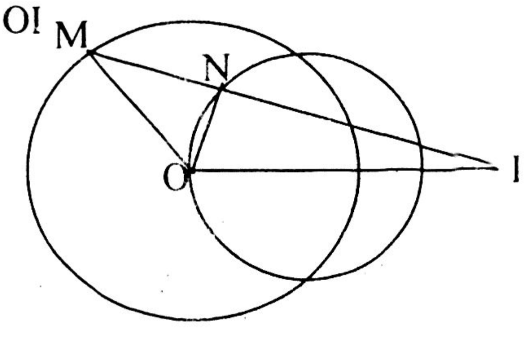
3. Dựa vào tính chất của phép vị tự để tìm quỹ tích của điểm M.

Bài 10. Cho đường tròn (O) và một điểm I cố định khác O. Một điểm M thay đổi trên đường tròn, tia phân giác của góc $\widehat{MOI}$ cắt tia IM tại N. Tìm quỹ tích điểm N

Giải

Gọi R là bán kính đường tròn (O) và d = OI

ON là phân giác góc $\widehat{MOI}$, ta có:



$$\frac{\overrightarrow{NI}}{\overrightarrow{NM}} = -\frac{OI}{\text{OM}} \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{IN}}{\overrightarrow{NM}} = \frac{OI}{\text{OM}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overrightarrow{IN}}{\overrightarrow{IN}+\overrightarrow{NM}} = \frac{OI}{OI+\text{OM}} \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{IN}}{\overrightarrow{IM}} = \frac{d}{\text{d}+\text{R}}$$

Suy ra: $\overrightarrow{IN} = \frac{d}{d+R}\overrightarrow{IM}$ thì $V\left(I;\frac{d}{\text{d+R}}\right)$: M → N.

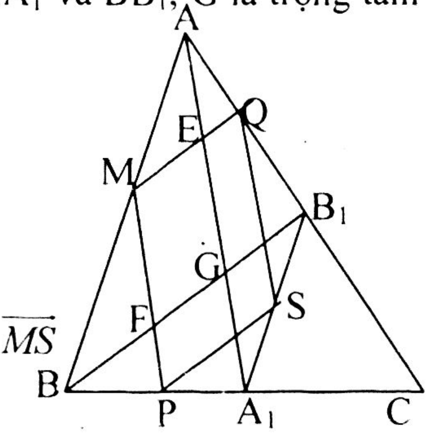
M thuộc đường tròn (O) suy ra N thuộc đường tròn (O'), ảnh của đường tròn (O) qua phép vị tự $V\left(I;\frac{d}{\text{d+R}}\right)$.

Tâm O' được xác định: $\overrightarrow{IO'} = \frac{d}{d+R}\overrightarrow{IO}$ và bán kính $R' = \frac{Rd}{d+R}$.

Bài 11. Cho tam giác ABC và điểm M thuộc cạnh AB. Qua M vẽ các đường thẳng song song với trung tuyến AA_1 và BB_1 cắt BC, CA tại P và Q. Tìm quỹ tích các điểm S sao cho tứ giác MPSQ là hình bình hành.

Giải

Gọi E, F lần lượt là giao điểm của MQ, MP với AA_1 và BB_1, G là trọng tâm tam giác ABC. Khi đó:



$$\frac{\overrightarrow{ME}}{\overrightarrow{BG}} = \frac{\overrightarrow{MQ}}{\overrightarrow{BB_1}} \Rightarrow \frac{\overrightarrow{ME}}{\overrightarrow{MQ}} = \frac{\overrightarrow{BG}}{\overrightarrow{BB_1}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \overrightarrow{ME} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MQ}$$

Tương tự, $\overrightarrow{MF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MP}$

$$\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MQ} + \frac{2}{3}\overrightarrow{MP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MS}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{GS} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GM}$$

Suy ra S là ảnh của M qua phép vị tự tâm G, tỉ số $k = -\frac{1}{2}$.

Khi M thuộc cạnh AB thì S thuộc đoạn thẳng A_1B_1 là ảnh của AB qua $V\left(G;-\frac{1}{2}\right)$

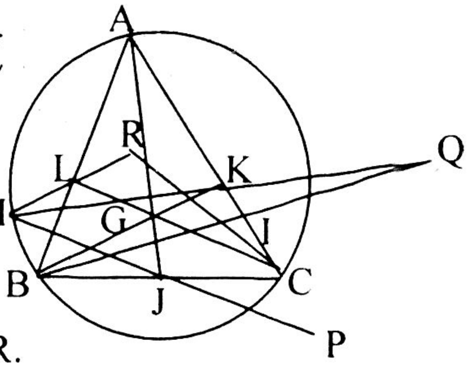
Vậy quỹ tích H là đoạn thẳng A_1B_1.

Bài 12. Gọi P, Q, R là các điểm đối xứng với điểm M qua trung điểm các cạnh của tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng các đoạn thẳng AP, BQ, CR cắt nhau tại trung điểm I của chúng.

b) Khi M chạy trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, tìm quỹ tích các điểm I.

Giải



a) Ta có: $\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{MJ}$, $\overrightarrow{MQ} = 2\overrightarrow{MK}$, $\overrightarrow{MR} = 2\overrightarrow{ML}$

$\Rightarrow$ V(M ; 2): ΔJKL → ΔPQR.

Gọi G là trọng tâm ΔABC thì

$V\left(G;-\frac{1}{2}\right)$: ΔABC→ ΔJKL

Suy ra: $V(M\,;2)\circ V\left(G;-\frac{1}{2}\right)$: ΔABC→ΔPQR.

Mà $V(M\,;2)\circ V\left(G;-\frac{1}{2}\right) = V(I\,;-1) = Đ_I$ là phép đối xứng tâm I. Suy ra I là trung điểm các đoạn thẳng AP, BQ, CR.

b) Ta có G, M và I thẳng hàng $\Rightarrow$ MI cắt AJ tại G $\Rightarrow$ G là trọng tâm tam giác AMP $\Rightarrow \overrightarrow{GI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GM} \Rightarrow V\left(G;-\frac{1}{2}\right)$: M → I.

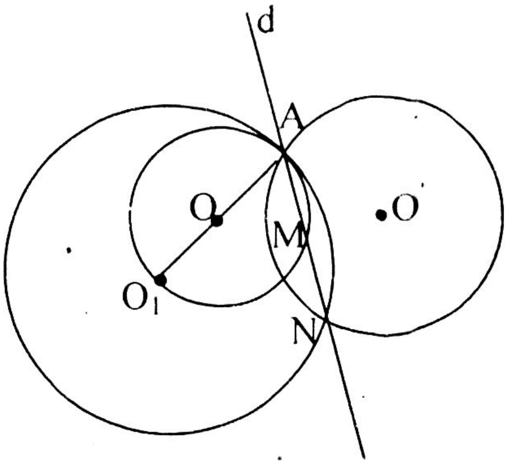
M thuộc đường tròn (O), ngoại tiếp ΔABC nên quỹ tích các điểm I là đường tròn (O'), ngoại tiếp ΔJKL.

Dạng 5. Áp dụng phép vị tự vào dựng hình.

Phương pháp:

1. Quy bài toán dựng hình về bài toán dựng điểm M nào đó phụ thuộc vào hai điều kiện độc lập (α) và (β).
2. Xác định phép quay để tìm điều kiện (α) gọi là H_α và điều kiện (β) gọi là H_β.
3. Điểm M là giao của H_α và H_β.

Bài 13. Cho hai đường tròn (O), (O') cắt nhau tại A và B. Hãy dựng qua A một đường thẳng d cắt đường tròn (O), (O') lần lượt tại M, N sao cho M là trung điểm của AN.



Giải

Phân tích: Giả sử dựng được đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn (O) tại M và cắt đường tròn (O') tại N sao cho AM =MN

$\Rightarrow$ AN = 2AM $\Rightarrow \overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AM} \Rightarrow$ V (A ; 2): M → N $\Rightarrow$ V (A ; 2): (O) → (O_1). Suy ra N là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (O') và (O_1).

Cách dựng:

- Dựng đường tròn (O_1) là ảnh của đường tròn (O) qua phép vị tự V(A ; 2).
- Đường tròn (O_1) cắt đường tròn (O) tại giao điểm thứ hai N.

- Dựng đường thẳng AN.

Chứng minh:

Gọi M là giao điểm thứ hai của đường thẳng AN với đường tròn (O). Theo cách dựng ta có: V(A ; 2): (O) → (O_1) ⇒ V(A ; 2): M → N

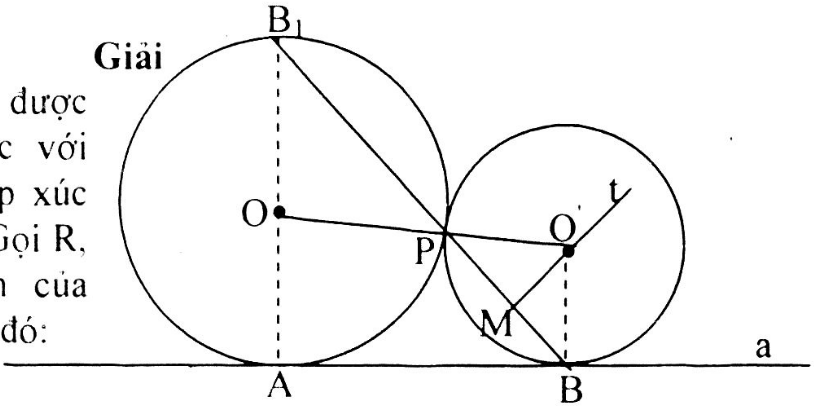
$$\Rightarrow \overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AM} \Rightarrow AM = MN.$$

Biện luận:

Ta có đường tròn (O) cắt đường tròn (O') tại hai điểm phân biệt A, B nên đường tròn (O_1) cắt đường tròn (O') tại hai điểm phân biệt A, N. Suy ra bài toán có một nghiệm hình.

Bài 14. Cho đường tròn (O) tiếp xúc với đường thẳng a tại A và điểm P thuộc (O). Dựng một đường tròn tiếp xúc với đường tròn (O) tại P và tiếp xúc với đường thẳng a.

Giải



Phân tích: Giả sử dựng được đường tròn (O') tiếp xúc với đường tròn (O) tại P, tiếp xúc với đường thẳng a tại B. Gọi R, R' lần lượt là bán kính của đường tròn (O), (O'). Khi đó:

$$V\left(P;-\frac{R}{R'}\right): (O') \to (O)$$

Đường tròn (O') tiếp xúc với đường thẳng a tại B nên đường tròn (O) tiếp xúc với đường thẳng a' tại B_1 là ảnh của a qua phép vị tự $V\left(P;-\frac{R}{R'}\right)$ và a' // a.

Ta có: Đường tròn (O) tiếp xúc với đường thẳng a tại A. Suy ra B_1 đối xứng với A qua tâm O.

Cách dựng:

- Dựng điểm B_1 đối xứng với A qua tâm O.
- Dựng đường thẳng B_1P cắt đường thẳng a tại B.
- Dựng trung trực Mt của đoạn thẳng PM cắt đường thẳng OP tại O'.
- Dựng đường tròn tâm O', bán kính R' = O'B.

Chứng minh: Theo cách dựng ta có: O'P = O'B = R' và O'B ⊥ a nên (O') tiếp xúc với đường thẳng a.

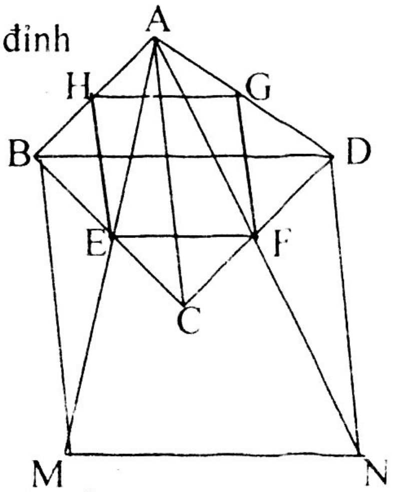
Mặt khác: OO' = OP + PO' = R + R' ⇒ (O') tiếp xúc với đường tròn (O) tại P.

Biện luận:

- Khi P ≡ A bài toán có vô số nghiệm hình: Những đường tròn có tâm O' thuộc đường thẳng AB_1 tiếp xúc với đường tròn (O) và đường thẳng tại P.
- Khi P không trùng với A, bài toán có một nghiệm hình.

Bài 15. Dựng hình thoi có bốn đỉnh nằm trên bốn cạnh của một tứ giác lồi sao cho các cạnh của hình thoi song song với các đường chéo của tứ giác.

Giải



Phân tích: Giả sử dựng được hình thoi EFGH có bốn đỉnh nằm trên bốn cạnh của tứ giác ABCD sao cho FE // GH // BD và EH // FG //AC.

Xét hình thoi BDNM có BM // AC ⇒ A, E, M thẳng hàng và A, F, N thẳng hàng.

$\Rightarrow V\left(A;\frac{\overline{AE}}{\overline{AM}}\right)$: BDNM → HGFE.

Cách dựng

– **Dựng** hình thoi BDNM có BM // AC.

– **Dựng điểm** E là giao điểm của hai đường thẳng AM và BC.

– **Dựng điểm** F là giao điểm của hai đường thẳng AN và DC.

– **Dựng** FG song song với AC, G ∈ AD.

– **Dựng** EH song song với AC, H ∈ AD.

– **Hình thoi** EFGH dựng được.

Chứng minh: Theo cách dựng ta có: BDNM là hình thoi có BM // AC.

Khi đó: $\frac{BE}{EC}=\frac{BM}{AC}$, $\frac{DF}{FC}=\frac{DN}{AC}$ và BM = DN ⇒ $\frac{BE}{EC}=\frac{DF}{FC}$ ⇒ EF // DB **(1)**

Mặt khác: $\frac{BE}{EC}=\frac{BH}{HA}$, $\frac{DF}{FC}=\frac{DG}{GA}$ ⇒ $\frac{BH}{HA}=\frac{DG}{GA}$ ⇒ HG // BD (2)

Suy ra EFGH là hình bình hành ⇒ HG = EF (3)

Từ (1), (2) và (3): $\frac{AE}{AM}=\frac{AF}{AN}=\frac{EF}{MN}=\frac{HG}{BD}=\frac{AG}{AD}=\frac{AH}{AB}$

Suy ra: $V\left(A;\frac{\overline{AE}}{\overline{AM}}\right)$: BDNM → HGFE mà BDNM là hình thoi nên HGFE cũng là hình thoi.

Biện luận: Bài toán có một nghiệm hình.

Dạng 6. Biểu thức giải tích của phép vị tự

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho phép vị tự V(I ; k) **với I** (x_0 ; y_0).

Ta có: **V(I ; k):** M (x ; y) → M’ (x' ; y') ⇒ $\overrightarrow{IM'}=k\overrightarrow{IM}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x'=kx+(1-k)x_0\\y'=ky+(1-k)y_0\end{cases}$ (1). Khi I ≡ O thì $\Leftrightarrow\begin{cases}x'=kx\\y'=ky\end{cases}$

Gọi (1) là biểu thức giải tích của phép vị tự V (I ; k).

Bài 16. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho phép **vị tự tâm I** (1;3), tỉ số k = − 2. Tìm hình biến của các đường sau qua V (I ; k)

a) Đường thẳng d: $2x + y - 1 = 0$

b) Đường tròn (C): $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 3$

c) Parabol (P): $y = x^2 - 3x + 2$.

Giải

V (I ; k): M (x ; y) → M' (x' ; y') có biểu thức giải tích: $\begin{cases} x' = -2x + 3 \\ y' = -2y + 9 \end{cases}$

Suy ra: $x = \dfrac{-x' + 3}{2}$ và $y = \dfrac{-y' + 9}{2}$ (*)

a) V (I ; k): M (x ; y)∈ d → M' (x' ; y')∈ d'. Thay (*) vào phương **trình của d ta** có: $2x' + y' - 13 = 0$.

Vậy, phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua V(I ; k): $2x + y - 13 = 0$.

b) V(I ; k): M (x ; y)∈ (C) → M' (x' ; y')∈ (C'). Thay (*) vào phương **trình của** đường tròn (C) ta có: $(x' + 1)^2 + (y' - 11)^2 = 12$.

Phương trình của đường tròn (C') là: $(x + 1)^2 + (y - 11)^2 = 12$.

Cách khác: Tâm và bán kính của (C) là J(2 ; − 1), $R = \sqrt{3}$.

V(I ; k): J → J' (x' ; y') ⇒ J' (− 1 ; 11) và V(I ; k): (C) → (C') **có bán kính** $R' = 2\sqrt{3}$. Phương trình của đường tròn (C') là: $(x + 1)^2 + (y - 11)^2 = 12$.

c) V(I ; k): M (x ; y)∈ (P) → M' (x' ; y')∈ (P'). Thay (*) vào phương **trình của** (P') ta có: $y' = -\dfrac{1}{2}(x')^2 + \dfrac{19}{2}$ nên phương trình của **parabol (P')** $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{19}{2}$.

Bài 17. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho hai **đường tròn** (C): $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 14 = 0$ và (C'): $x^2 + y^2 + 2y - 11 = 0$. **Xác định phép** vị tự biến đường tròn (C) thành đường tròn (C').

Giải

Phương trình của đường tròn (C): $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 27$ **có tâm** $I_1(5 ; 4)$, bán kính $R_1 = 3\sqrt{3}$. Phương trình của đường tròn (C'): $x^2 + (y + 1)^2 = 12$, **có** tâm $I_2(0 ; - 1)$ và bán kính $R_2 = 2\sqrt{3}$.

Xét V(I ; k): M (x ; y)∈ (C) → M' (x' ; y')∈ (C') có biểu thức là:

$$\begin{cases} x' = kx + (1 - k)x_0 \\ y' = ky + (1 - k)y_0 \end{cases}$$

Ta có $R_2 = |k| R_1$ nên $2\sqrt{3} = |k| 3\sqrt{3} \Leftrightarrow |k| = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow k = \pm\dfrac{2}{3}$

* Khi k = $\frac{2}{3}$ thì ta có: $\begin{cases} x' = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x_0 \\ y' = \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}y_0 \end{cases}$ (1) V (I ; k): I_1 (5 ; 4) → I_2(0; – 1)

Thay vào (1), ta có: $x_0 = -10$, $y_0 = -11$.

Phép vị tự V (I ; k) có I (– 10 ; – 11), tỉ số k = $\frac{2}{3}$.

* Khi k = $-\frac{2}{3}$ thì ta có: $\begin{cases} x' = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}x_0 \\ y' = -\frac{2}{3}y + \frac{5}{3}y_0 \end{cases}$ (2) V (I ; k): I_1 (5 ; 4) → I_2(0; –1)

Thay vào (2), ta có: $x_0 = 2$, $y_0 = 1$.

Phép vị tự V (I ; k) có I (2 ; 1), tỉ số k = $-\frac{2}{3}$.

BÀI TẬP

Bài 1. (Định lí Gergonne). Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (O). Gọi P, Q, R lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn (O) với các cạnh BC, AC và AB. Chứng minh rằng:

a) AP, BQ, CR đồng quy.

b) $\frac{\overline{PI}}{\overline{PA}} + \frac{\overline{QI}}{\overline{QB}} + \frac{\overline{RI}}{\overline{RC}} = 1$.

Bài 2. (Định lí Pascal). Trên đường tròn (O) lấy các điểm A, B, C, D, E, F sao cho AB cắt CD tại R ; CD cắt EF tại P; EF cắt AB tại Q. Giả sử AF cắt CD tại I, AB cắt DE tại J và CB cắt EF tại H. Chứng minh I , J , H thẳng hàng.

Bài 3. (Bài toán Phecmar). Cho hình chữ nhật ABCD với AB = 2a, BC = $a\sqrt{2}$. Về phía ngoài hình chữ nhật dựng nửa đường tròn đường kính AB. Các đường thẳng MD và MC cắt cạnh AB tại N và L. Tính $AL^2 + BN^2$.

Bài 4. Cho đường tròn (O_1) tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại A. Tiếp tuyến bất kì của đường tròn (O_1) tại M cắt đường tròn (O) tại hai điểm C và D.

Chứng minh $\widehat{DAM} = \widehat{MAC}$

Bài 5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), M là trung điểm cạnh BC. B và C di động trên đường tròn (O), A cố định.

a) Tìm quỹ tích trọng tâm G của tam giác ABC.

b) Phân giác góc $\widehat{BAC}$ cắt BC tại I và cắt đường tròn (O) tại D. Tìm quỹ tích điểm G khi I và D cố định.

Bài 6. Cho tam giác ABC có hai điểm cố định B và C. Các đường trung tuyến BN và CN vuông góc với nhau.

a) Tìm quỹ tích các điểm A.

b) Chứng minh $AB^2 + AC^2 = 5BC^2$.

Bài 7. Cho đoạn thẳng AB cố định và M là điểm di động trên đoạn thẳng. Vẽ cùng phía đối với đường thẳng AB các tam giác đều AMP, QMB. AP cắt BQ tại C.

a) Tìm quỹ tích trung điểm I của PQ.

b) Tìm quỹ tích tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CPQ.

Bài 8. Cho hai đường thẳng x'Ox, y'Oy và một điểm A không nằm trên hai đường thẳng đó. Dựng một đường thẳng đi qua A cắt x'Ox, y'Oy lần lượt tại B, C sao cho AB = 2AC.

Bài 9. Cho hai đường tròn đồng tâm (C_1), (C_2). Từ điểm A trên đường tròn lớn (C_1) dựng một dây cung ABCD cắt đường tròn (C_2) tại B và C; cắt đường tròn (C_1) tại P và Q sao cho AB = BC = CD.

Bài 10. Cho tam giác ABC với B là góc nhỏ nhất. Dựng hình thoi MNPQ sao cho $\widehat{NMQ} = 60^0$, cạnh MN nằm trên cạnh BC, hai đỉnh P, Q theo thứ tự thuộc hai cạnh AC, AB.

Bài 11. Cho tam giác ABC. Tìm trên cạnh AB điểm E, trên cạnh AC điểm F sao cho BE = EF = FC.

Bài 12. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho phép vị tự tâm O, tỉ số $k = \frac{1}{2}$. Tìm hình biến của các đường sau qua phép vị tự trên

a) Đường thẳng d: $3x - 2y + 1 = 0$ c) Đường cong (S): $y = \frac{2x+1}{1-x}$.

b) Đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$

Bài 13. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho hai đường tròn (C_1): $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 1$ và (C_2): $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 4$. Xác định phép vị tự biến đường tròn (C_1) thành đường tròn (C_2).

Bài 14. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho điểm A(- a ; 0), B(a ; 0) với a > 0. Gọi (C) là đường tròn đường kính AB và M là điểm di động trên (C). Gọi S đối xứng với A qua M.

a) Tìm quỹ tích các điểm S.

b) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔASB. Tìm quỹ tích các điểm I.

§5. PHÉP ĐỒNG DẠNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa: Một phép biến hình f được gọi là phép đồng dạng với tỉ số k (k > 0) nếu với hai điểm bất kì M và N có ảnh M' và N' thì $M'N' = kMN$.

2. Tính chất:

1. Mọi phép đồng dạng f, tỉ số k (k > 0) là tích của một phép vị tự tỉ số k và một phép dời hình.

Đặc biệt: Phép đồng dạng có một điểm kép O duy nhất là tích giao hoán của một phép vị tự và một phép quay có cùng tâm O. Khi đó, kí hiệu

$$Z(O;k;\varphi) = Q(O;\varphi) \circ V(O;k) = V(O;k) \circ Q(O;\varphi)$$

O được gọi là tâm đồng dạng.

2. Phép đồng dạng, tỉ số k (k > 0):

- Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm đó.
- Biến đường thẳng thành đường thẳng.
- Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số đồng dạng là k.
- Biến đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính kR.

B. CÁC DẠNG TOÁN.

Dạng 1. Xác định phép đồng dạng

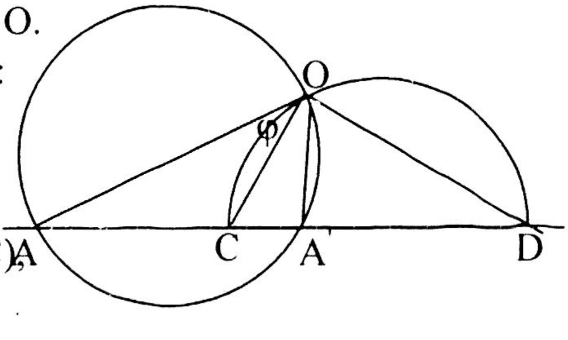
Phương pháp: **1.** Xác định phép quay Q(O; φ) và phép vị tự V(O; k).

2. Xác định tâm đồng dạng O.

* Nếu biết một cặp điểm A→ A' thì ta có:

$$\begin{cases} OA = kOA' \\ (OA, OA') = \varphi \end{cases}$$

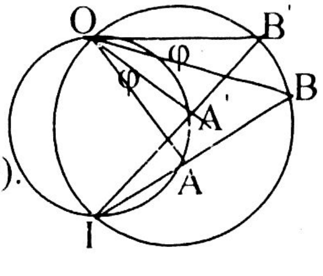
Từ OA = kOA' ⇒ O thuộc đường tròn (C) đường kính CD với $\frac{\overline{CA}}{\overline{CA'}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DA'}} = k$



Từ (OA, OA') = φ

⇒ O thuộc cung (γ) chứa góc φ, dây cung AA'

Suy ra: O là giao điểm của đường tròn (C) và cung (γ).



* Nếu biết hai cặp điểm A→ A', B→ B' thì ta có:

$$\begin{cases} A'B' = kAB \\ (AB; A'B') = \varphi \end{cases}$$

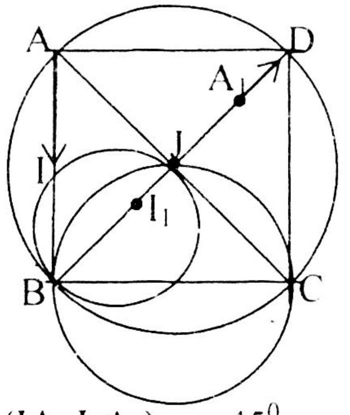
– Gọi I là giao điểm của AB và A'B' thì ta có $\begin{cases} (OA; OA') = (IA; IA') = \varphi \\ (OB; OB') = (IB; IB') = \varphi \end{cases}$

– Suy ra: O là giao điểm thứ hai của hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác IAA' và IBB'.

Bài 1. Cho hình vuông ABCD có các đỉnh được xếp theo chiều dương. Gọi I là trung điểm của AB và J là giao của hai đường chéo AC và BD. Xác định phép đồng dạng

a) Biến $\overrightarrow{IA}$ thành $\overrightarrow{JD}$.

b) Biến $\overrightarrow{BA}$ thành $\overrightarrow{JD}$.



Giải

a) Ta có: $JD = \sqrt{2}\,IA$ và $(IA, JD) = -45^0$.

Suy ra: $\overrightarrow{JD}$ là ảnh của $\overrightarrow{IA}$ qua phép đồng dạng $Z(O\ ;\ \sqrt{2}\ ;\ -45^0)$ với tâm đồng dạng O là giao điểm của hai đường tròn ngoại tiếp ΔBIJ và $\Delta BAD \Rightarrow O \equiv B$.

Ta có: $Q(B\ ;\ -45^0)$: $I \to I_1$ và $A \to A_1 \Rightarrow I_1A_1 = IA$ và $(IA, I_1A_1) = -45^0$

$V(B\ ;\ \sqrt{2})$: $I_1 \to J$ và $A_1 \to D \Rightarrow \overrightarrow{JD} = \sqrt{2}\ \overrightarrow{I_1A_1} \Rightarrow JD = \sqrt{2}\,IA$ và

$(IA, JD) = (IA, I_1A_1) = -45^0$ nên $Z(O\ ;\sqrt{2}\ ;\ -45^0) = V(B\ ;\ \sqrt{2}\ ) \circ Q(B\ ;\ -45^0)$.

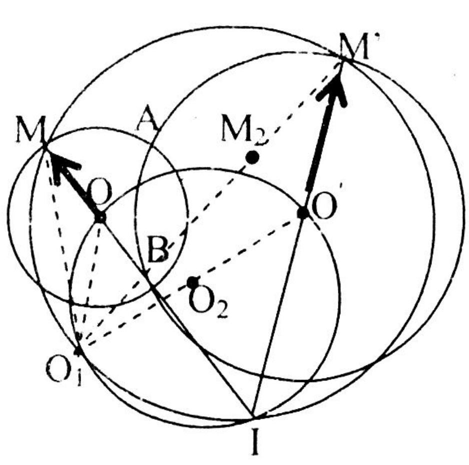
b) Ta có: $JD = \dfrac{\sqrt{2}}{2}BA$ và $(BA, JD) = -45^0$. Suy ra: $\overrightarrow{JD}$ là ảnh của $\overrightarrow{BA}$ qua phép đồng dạng $Z(O\ ;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ -45^0)$ với tâm đồng dạng O là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp ΔBAD và đường tròn đi qua J, tiếp xúc với AB tại B $\Rightarrow O \equiv C$.

Ta có: $Q(C\ ;\ -45^0)$: $B \to B_1$ và $A \to A_1 \Rightarrow B_1A_1 = BA$ và $(BA, B_1A_1) = -45^0$

$V(C\ ;\ \dfrac{\sqrt{2}}{2})$: $B_1 \to J$ và $A_1 \to D \Rightarrow \overrightarrow{JD} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\ \overrightarrow{B_1A_1} \Rightarrow JD = \dfrac{\sqrt{2}}{2}IA$ và

$(BA, JD) = (BA, B_1A_1) = -45^0$ nên $Z(O\ ;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ -45^0) = V(B;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ) \circ Q(C;\ -45^0)$

Bài 2. Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; 2R) cắt nhau ở A và B. Gọi M, M' lần lượt trên đường tròn (O; R) và (O'; R') sao cho $\left(OM;O'M'\right) = -\dfrac{\pi}{3}$. Xác định phép đồng dạng biến $\overrightarrow{OM}$ thành $\overrightarrow{OM'}$.



Giải

Ta có: $O'M' = 2OM$ và $\left(OM;O'M'\right) = -\dfrac{\pi}{3}$

Suy ra: $\overrightarrow{O'M'}$ là ảnh của $\overrightarrow{OM}$ qua phép đồng dạng Z(O_1 ;2 ; $-\frac{\pi}{3}$) với tâm đồng dạng O_1
là giao điểm của hai đường tròn ngoại tiếp ΔOO'I và ΔMM'I.

Ta có: Q(O_1; $-\frac{\pi}{3}$): O→ O_2 và M → M_2 ⇒ O_2M_2 = OM và (OM ; O_2M_2) = $-\frac{\pi}{3}$.

V(O_1; 2): O_2 → O' và M_2 → M' ⇒ $\overrightarrow{O'M'} = 2\overrightarrow{O_2M_2}$ ⇒ O'M' = 2OM và

$(OM;O'M') = (OM;O_2M_2) = -\frac{\pi}{3}$ nên Z(O_1 ;2 ; $-\frac{\pi}{3}$)=V(O_1; 2) ∘ Q(O_1; $-\frac{\pi}{3}$).

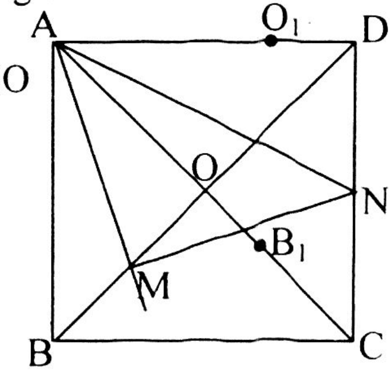
Dạng 2. Ứng dụng phép đồng dạng vào chứng minh

Phương pháp: **1.** Xác định phép đồng dạng

2. Áp dụng tính chất của phép đồng dạng

Bài 3. Cho hình vuông ABCD có tâm O. Gọi M là trung điểm của BO, N là trung điểm của CD. Chứng minh tam giác AMN vuông cân.

Giải



Phép quay Q(A ; 45^0): B → B_1, O → O_1 ⇒ B_1O_1 = BO

Phép vị tự V(A ; $\sqrt{2}$): B_1 → C, O_1 → D

⇒ $\overrightarrow{CD} = \sqrt{2}\,\overrightarrow{B_1O_1}$ ⇒ CD = $\sqrt{2}$ B_1O_1 = $\sqrt{2}$ BO

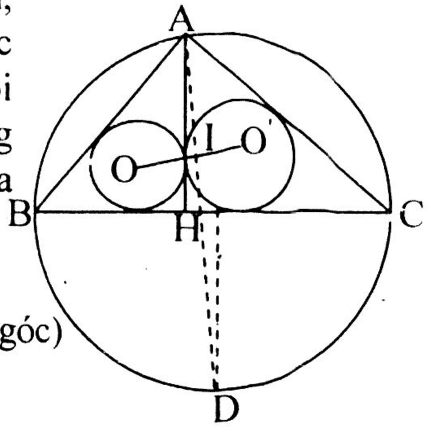
⇒ Z(A ; $\sqrt{2}$; 45^0) = V(A ; $\sqrt{2}$) ∘ Q(A ; 45^0):

ΔABO → ΔACD

M là trung điểm BO có ảnh N là trung điểm CD

⇒ ΔAMN ~ ΔADC, mà ΔADC vuông cân tại D nên ΔAMN vuông cân tại M.

Bài 4. Một điểm A thay đổi trên nửa đường tròn, đường kính BC, AH là đường cao của tam giác ABC. Gọi O, O' lần lượt là tâm các đường tròn nội tiếp tam giác AHB, AHC. Chứng minh đường vuông góc hạ từ A xuống đường thẳng OO' đi qua một điểm cố định.



Giải

Ta có: $\widehat{BAH} = \widehat{HAC}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)

⇒ ΔAHB ~ ΔCHA ⇒ $\frac{CH}{AH} = \frac{HA}{HB} = \frac{CA}{AB}$

Phép quay Q(H ; -90^0): A → A_1, B → B_1

Phép vị tự $V\left(H;\frac{HC}{HA}\right)$: A_1 → C, B_1 → A

⇒ $Z\left(H;\frac{HC}{HA};-90^0\right) = V\left(H;\frac{HC}{HA}\right) \circ Q\left(H;-90^0\right)$: ΔAHB → ΔCHA

$$\Rightarrow Z\left(H;\frac{HC}{HA};-90^0\right):(O)\to(O')\Rightarrow \Delta HOO' \sim \Delta HBA$$

$$\Rightarrow \frac{HO}{HB}=\frac{OO'}{BA}=\frac{HO'}{HA} \text{ và } (HB\ ;\ HO) = -45^0.$$

Phép quay $Q(H\ ;\ -45^0)$: $B \to B_2,\ A \to A_2$

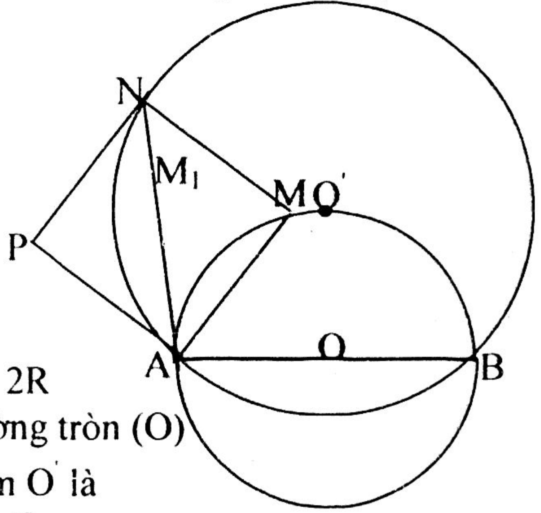
Phép vị tự $V\left(H;\frac{HC}{HA}\right)$: $B_2 \to O,\ A_2 \to O'$

$$\Rightarrow Z\left(H;\frac{HC}{HA};-45^0\right): BA \to OO' \text{ và } (BA, OO') = -45^0.$$

Suy ra: Đường thẳng AI vuông góc với OO' thì tạo với AB một góc 45^0 nên AI đi qua trung điểm D của nửa đường tròn phía dưới tam giác ABC.

Dạng 3. Tìm quỹ tích (Tập hợp điểm) bằng phép đồng dạng
Phương pháp: 1. Xác định phép đồng dạng biến điểm M thành điểm M'.
2. Tìm quỹ tích của điểm M.
3. Dựa vào tính chất phép đồng dạng để tìm quỹ tích của điểm M'

Bài 5. Cho đường tròn (O), đường kính AB = 2R. M là một điểm bất kì trên(O). Dựng hình vuông AMNP có các đỉnh theo chiều dương. Tìm quỹ tích các điểm N.



Giải

Ta có: $AN = \sqrt{2}\,AM$ và $(AM, AN) = 45^0$.

Phép quay $Q(A\ ;\ 45^0)$: $M \to M_1$

Phép vị tự $V(A,\ \sqrt{2})$: $M_1 \to N$

$\Rightarrow Z(A\ ;\ \sqrt{2}\ ;\ 45^0) = V(A\ ;\ \sqrt{2}) \circ Q(A\ ;\ 45^0)$

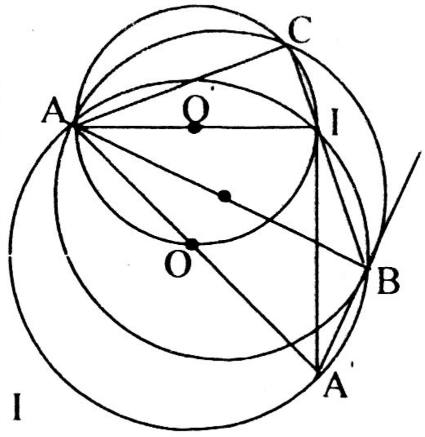
$: M \to N$

M thuộc đường tròn (O), đường kính AB = 2R nên N thuộc đường tròn (O'), là ảnh của đường tròn (O) qua phép đồng dạng $Z(A\ ;\ \sqrt{2}\ ;\ 45^0)$ có tâm O' là trung điểm của cung AB và bán kính $R' = \sqrt{2}R$.

Bài 6. Cho điểm A cố định chạy trên đường tròn (O) và tam giác ABC vuông cân tại C, B di động trên đường tròn (O).

a) Chứng minh đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định.

b) Tìm quỹ tích các điểm C.



Giải

a) Gọi A' đối xứng với A qua tâm O và BC cắt (O) tại I

Phép quay $Q(A\,;45^0)$: $B \to B_1$ $A' \to I_1$

Thì $BA' = B_1I_1$ và $(BA', B_1I_1) = 45^0$

Phép vị tự $V\left(A;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$: $B_1 \to C$; $I_1 \to I_2$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AB_1} \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{2}}{2}AB_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}AB$$

$$\Rightarrow Z\left(A;\frac{\sqrt{2}}{2};45^0\right) = V\left(A;\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \circ Q(A\,;45^0): B \to C,\ A' \to I_2.$$

Ta có ΔABC vuông cân tại C nên $\Delta AA'I_2$ vuông cân tại $I_2 \Rightarrow I_2$ là trung điểm của cung $\overset{\frown}{AA'}$ thì I_2 cố định.

Mặt khác: $(BA', CI_2) = 45^0$ và $(BA', CB) = 45^0 \Rightarrow I_2 \in BC \Rightarrow I_2 \equiv I$.

Vậy đường thẳng BC luôn đi qua điểm cố định I.

b) Ta có: $Z\left(A;\dfrac{\sqrt{2}}{2};45^0\right)$: $B \to C$. Điểm B thuộc đường tròn (O) nên điểm C thuộc đường tròn (O') là ảnh của (O) qua phép đồng dạng trên. Vậy quỹ tích của điểm C là đường tròn (O'), đường kính AI.

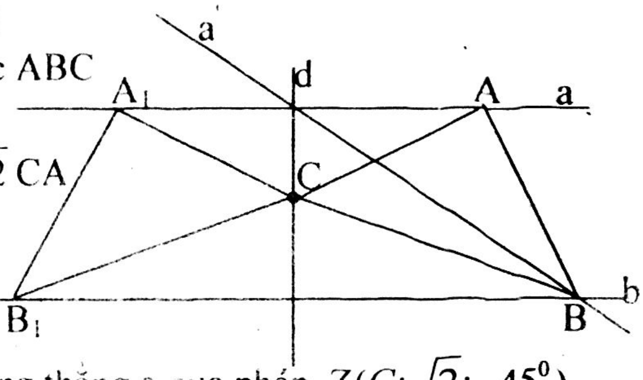
Dạng 4. Áp dụng phép đồng dạng vào dựng hình.

Phương pháp:

1. Quy bài toán dựng hình về bài toán dựng điểm M nào đó phụ thuộc vào hai điều kiện độc lập (α) và (β).
2. Xác định phép đồng dạng để tìm điều kiện (α) là H_α và điều kiện (β) là H_β.
3. Điểm M là giao của H_α và H_β.

Bài 7. Dựng tam giác ABC vuông cân tại A có đỉnh C cho trước và hai đỉnh A, B lần lượt thuộc hai đường thẳng song song a và b cho trước.

Giải



Phân tích: Giả sử dựng được tam giác ABC vuông cân tại A, A ∈ a, B∈ b.

Khi đó: $(CA, CB) = -45^0$ và $CB = \sqrt{2}\,CA$

Suy ra, B là ảnh của A qua phép đồng dạng $Z(C;\sqrt{2};-45^0)$.

Cách dựng:

- Dựng đường thẳng a' là ảnh của đường thẳng a qua phép $Z(C;\sqrt{2};-45^0)$.
- Dựng điểm B là giao của hai đường thẳng a' và b.

– Dựng điểm A là ảnh của B qua phép đồng dạng $Z\left(C;\frac{\sqrt{2}}{2};45^0\right)$

– Tam giác ABC dựng được.

Chứng minh: Theo cách dựng, ta có A ∈ a và CA = $\frac{\sqrt{2}}{2}CB \Rightarrow CB = \sqrt{2}CA$

(CA, CB) = 45^0. Trong tam giác CAB, theo định lí cosin:
$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA.CB\cos(CA, CB) = CA^2 + 2CA^2 - 2CA^2 = CA^2$

⇔AB = CA ⇒ ΔABC cân tại A. Mặt khác $\widehat{ACB} = 45^0$ nên ΔABC vuông cân tại A.

Biện luận: Ta dựng được hai đường thẳng a', a'' đối xứng nhau qua đường thẳng d, đi quaC và vuông góc với một trong hai đường thẳng a, b. Suy ra, bài toán có hai nghiệm hình.

Dạng 5. Biểu thức giải tích của phép đồng dạng

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho phép đồng dạng Z (I ; k ; φ)
Z (I ; k ; φ): M (x ; y) → M' (x' ; y').

a) Khi tâm I trùng với gốc tọa độ O.

Đặt OM = r và $\left(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM}\right) = \alpha$ thì $\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{cases}$ và OM' = kOM

Tọa độ của M' là
$$\begin{cases} x' = k\left(x\cos\varphi - y\sin\varphi\right) \\ y' = k\left(x\sin\varphi + y\cos\varphi\right) \end{cases} \quad (1)$$

Để tính x, y theo x', y' ta dùng phép đồng dạng $Z\left(O;\frac{1}{k};-\varphi\right)$:

M' (x' ; y') → M (x ; y)

$$\begin{cases} x = \frac{1}{k}\left(x'\cos\varphi + y'\sin\varphi\right) \\ y = \frac{1}{k}\left(-x'\sin\varphi + y'\cos\varphi\right) \end{cases} \quad (2)$$

a) Khi tâm I(x_0 ; y_0)

Ta có:
$$\begin{cases} x' - x_0 = k[(x - x_0)\cos\varphi - (y - y_0)\sin\varphi] \\ y' - y_0 = k[(x - x_0)\sin\varphi + (y - y_0)\cos\varphi] \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x - x_0 = \frac{1}{k}\left[\left(x' - x_0\right)\cos\varphi + \left(y' - y_0\right)\sin\varphi\right] \\ y - y_0 = \frac{1}{k}\left[-\left(x' - x_0\right)\sin\varphi + \left(y' - y_0\right)\cos\varphi\right] \end{cases} \quad (4)$$

Gọi (1), (2), (3), (4) là biểu thức giải tích của **phép đồng dạng**.

Bài 8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho góc $\varphi = 45^0$ và k = 2.

a) Viết biểu thức giải tích của phép đồng dạng Z (O ; k ; φ).

b) Viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C):

$x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ qua phép đồng dạng Z(O ; k ; φ).

Giải

a) Phép đồng dạng Z(O ; k ; φ) = Z(O ; 2 ; 45^0): M (x ; y) → M' (x' ; y)

$$\begin{cases} x' = 2\left(x\cos45^0 - y\sin45^0\right) \\ y' = 2\left(x\sin45^0 + y\cos45^0\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x\sqrt{2} - y\sqrt{2} \\ y' = x\sqrt{2} + y\sqrt{2} \end{cases} \quad (*)$$

b) Z(O ; 2 ; 45^0): M (x ; y) ∈ (C)→ M' (x' ; y') ∈ (C')

Từ (*) ta có: $\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(x' + y'\right) \\ y = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(x' - y'\right) \end{cases}$, thay vào phương trình của đường tròn (C)

ta có: $(x')^2 + (y')^2 - 2\sqrt{2}x' - 2\sqrt{2}y' - 12 = 0$.

Phương trình đường tròn (C'): $x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y - 12 = 0$.

Cách khác: Tâm và bán kính của đường tròn (C) là I (1 ; 0), R = 2.

Z(O ; 2 ; 45^0): I(1 ; 0) ∈ (C)→ I'(x' ; y')

Thay vào (*) ta có: $\begin{cases} x' = \sqrt{2} \\ y' = \sqrt{2} \end{cases}$ nên I' ($\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$), Bán kính R' = 2R = 4.

Phương trình đường tròn (C'): $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 16$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y - 12 = 0.$$

BÀI TẬP

Bài 1. Cho hình chữ nhật ABCD có các đỉnh vẽ theo chiều dương, AD = 2AB. M là giao điểm của hai đường chéo. Xác định phép đồng dạng biến $\overrightarrow{AB}$ thành $\overrightarrow{DM}$.

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A, có góc B bằng 30^0. Xác định phép đồng dạng biến $\overrightarrow{CA}$ thành $\overrightarrow{AB}$.

Bài 3. Cho hai tia Ox, Oy sao cho (Ox, Oy) = 45^0. Trên tia Ox lấy một đoạn thẳng MN nhận điểm cố định A làm trung điểm. Trên tia Oy lấy một đoạn thẳng PQ nhận điểm cố định B làm trung điểm, B khác O.

1) Xác định phép đồng dạng.

a) Biến $\overrightarrow{MN}$ thành $\overrightarrow{PQ}$. Gọi I_1 là tâm của phép đồng dạng đó.

b) Biến $\overrightarrow{MN}$ thành $\overrightarrow{QP}$. Gọi I_2 là tâm của phép đồng dạng đó.

2) Chứng minh rằng I_1, I_2 cùng nằm trên một đường tròn cố định.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại B, đường cao BE. Xác định phép đồng dạng biến tam giác AEB thành tam giác BEC.

Bài 5. Cho tam giác ABC. Về phía ngoài tam giác dựng các tam giác BPC, CQA, ARB sao cho $\widehat{CBP} = \widehat{CAQ} = 45^0$, $\widehat{BCP} = \widehat{QCA} = 30^0$, $\widehat{ABR} = \widehat{BAR} = 15^0$

Chứng minh $\widehat{QRP} = 90^0$ và QR = RP.

Bài 6. Cho tam giác ABC và điểm M di động trên đường thẳng chứa cạnh BC. Gọi O, O' lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp tam giác MAB, MAC.

a) Chứng minh tam giác AOO' đồng dạng với tam giác ABC.

b) Gọi I là điểm thuộc đường thẳng OO' sao cho $\dfrac{\overline{IO}}{\overline{IO'}} = k$ (k cho trước).

Tìm quỹ tích các điểm I.

Bài 7. Cho đường thẳng d cố định và một điểm A cố định không nằm trên d. Tam giác ABC vuông cân tại B, có đỉnh B di động trên d.

a) Tìm quỹ tích đỉnh C.

b) Tìm quỹ tích trọng tâm G của tam giác ABC.

Bài 8. Cho đường thẳng d, đường tròn (C) và một điểm O không thuộc hai đường đó. Trên đường thẳng d lấy một điểm A, trên đường tròn (C) lấy điểm B. Dựng tam giác OAB biết tam giác vuông cân tại A.

Bài 9. Cho tam giác OAA' vuông cân tại A sao cho $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}\right) = \dfrac{\pi}{4}$, điểm O cố định, điểm A thuộc đường thẳng cố định d không đi qua O.

a) Tìm quỹ tích điểm A'.

b) Gọi G là trọng tâm tam giác OAA'. Tìm quỹ tích điểm G.

Bài 10. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho phép biến hình

f: M (x ; y) → M' (x' ; y')

$$\begin{cases} x' = 2x - 2\sqrt{3}y \\ y' = 2\sqrt{3}x + 2y \end{cases}$$

a) Chứng minh f là một phép đồng dạng.

b) Tìm ảnh của đường thẳng d: 2x + y − 1 = 0 qua phép đồng dạng f.

§ 6. HÌNH BẰNG NHAU – HÌNH ĐỒNG DẠNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Hai hình gọi là **bằng nhau** nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.
2. Hai hình gọi là **đồng dạng với nhau** nếu có một phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.

B. CÁC DẠNG TOÁN.

Dạng 1. Chứng minh hai hình H và H_1 bằng nhau

Phương pháp: Xác định một phép dời hình biến hình H thành H_1 hoặc ngược lại.

Bài 1. Cho hai tam giác ABC, $A'B'C'$ có các cạnh tương ứng bằng nhau: $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$. Chứng minh rằng có duy nhất một phép dời hình f biến A thành A', B thành B', C thành C'.

Giải

* Xây dựng phép dời hình f:

Giả sử ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có $A \neq A'$. Gọi d_1 là trung trực đoạn thẳng AA'. Khi đó $D_{d_1} : \Delta ABC \rightarrow \Delta A'B_1C_1$

$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B_1C_1 \Rightarrow A'B_1 = A'B'$

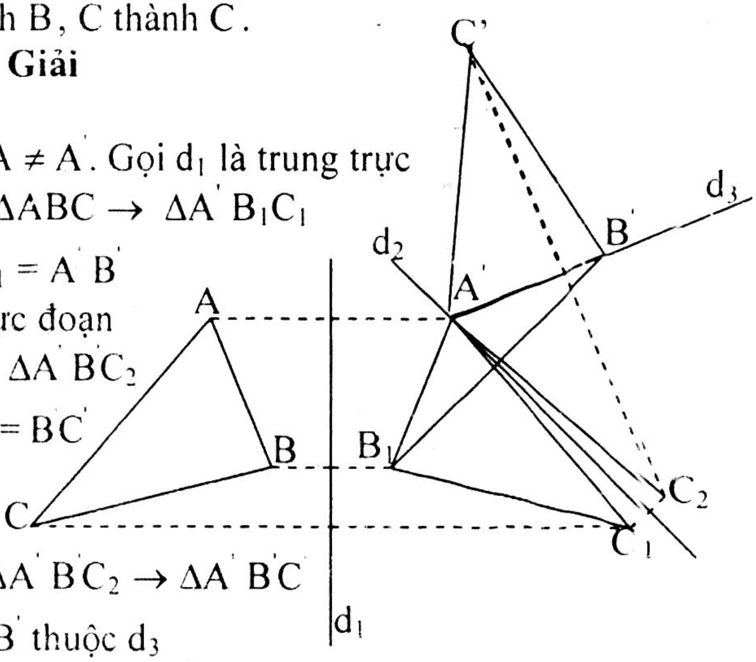
Nếu $B_1 \neq B'$, gọi d_2 là trung trực đoạn thẳng $B_1B' \Rightarrow D_{d_2} : \Delta A'B_1C_1 \rightarrow \Delta A'B'C_2$

$\Rightarrow \Delta A'B'C_2 = \Delta A'B_1C_1 \Rightarrow B'C_2 = B'C'$

$A'C_2 = A'C'$ và $A' \in d_2$.

Nếu $C_2 \neq C'$, gọi d_3 là trung trực đoạn thẳng $C_2C' \Rightarrow D_{d_3} : \Delta A'B'C_2 \rightarrow \Delta A'B'C'$

$\Rightarrow \Delta A'B'C_2 = \Delta A'B'C'$ và A', B' thuộc d_3



Suy ra: $D_{d_3} \circ D_{d_2} \circ D_{d_1} : \Delta ABC \rightarrow \Delta A'B'C'$. Nếu $B_1 \equiv B'$ thì bỏ qua phép D_{d_2}; nếu $C_2 \equiv C'$ thì bỏ qua phép D_{d_3}. Vậy, $f = D_{d_3} \circ D_{d_2} \circ D_{d_1}$ là một phép dời hình.

* Chứng minh tính duy nhất:

Giả sử có hai phép dời hình f và g biến $A \rightarrow A'$, $B \rightarrow B'$, $C \rightarrow C'$

Với bất kì điểm M và gọi $M' = f(M)$, $M_1 = g(M)$ và $M' \neq M_1$.

Khi đó: $A'M' = AM$ và $A'M_1 = AM \Rightarrow A'M' = A'M_1 \Rightarrow A'$ thuộc đường trung trực đoạn thẳng M_1M'.

Tương tự: $B'M' = B'M_1 \Rightarrow B'$ thuộc đường trung trực đoạn thẳng M_1M'.

$C'M' = C'M_1 \Rightarrow C'$ thuộc đường trung trực đoạn thẳng M_1M'.

Suy ra: A', B', C' thẳng hàng. Trái với giả thiết $\Rightarrow M' \equiv M_1 \Rightarrow f(M) = g(M)$ $\Rightarrow f \equiv g$.

Bài 2. Chứng minh rằng hai hình chữ nhật có cùng kích thước (cùng chiều dài và chiều rộng) thì bằng nhau.

Giải

Xét hai hình chữ nhật $ABCD$ và $A'B'C'D'$ có $AB = CD = A'B' = C'D'$ và $AD = BC = A'D' = B'C'$ $\Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C'$. Suy ra, có một phép dời hình $f: \Delta ABC \to \Delta A'B'C'$. Gọi O là trung điểm của AC thì $f: O \to O'$ và O' là trung điểm của $A'C'$. Mặt khác O, O' là trung điểm của BD, $B'D'$ nên $f: D \to D'$.
Suy ra: $f: ABCD \to \Delta A'B'C'D'$. Vậy hai hình chữ nhật $ABCD$ và $A'B'C'D'$ bằng nhau.

Bài 3. Chứng minh rằng:

a) Hai đoạn thẳng có độ dài bằng nhau thì bằng nhau.

b) Hai góc có cùng số đo thì bằng nhau.

c) Hai đường tròn có bán kính bằng nhau thì bằng nhau.

Giải

a) Xét hai đoạn thẳng AB và $A'B'$ có độ dài bằng nhau, khi đó lấy điểm C không thẳng hàng với AB và điểm C' sao cho $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$.
Suy ra, có một phép dời hình $f:\Delta ABC \to \Delta A'B'C' \Rightarrow f:AB \to A'B' \Rightarrow AB = A'B'$.

b) Xét hai góc $\widehat{xOy}$ và góc $\widehat{x'O'y'}$ có cùng số đo φ. Khi đó trên tia Ox lấy điểm A, trên tia Oy lấy điểm B và trên tia $O'x'$, $O'y'$ lấy hai điểm A', B' sao cho $OA = O'A'$ và $OB = O'B'$, suy ra: $\Delta OAB = \Delta O'A'B'$. Suy ra có một phép dời hình $f: \Delta OAB \to \Delta O'A'B' \Rightarrow f: \widehat{AOB} \to \widehat{A'O'B'} \Rightarrow f: \widehat{xOy} \to \widehat{x'O'y'} \Rightarrow \widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$.

c) Xét hai đường tròn (O, R) và (O', R). Khi đó, xét phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{OO'}$.
Ta có: $T_{\overrightarrow{OO'}}: (O, R) \to (O', R)$. Suy ra, hai đường tròn (O, R) và (O', R) bằng nhau.

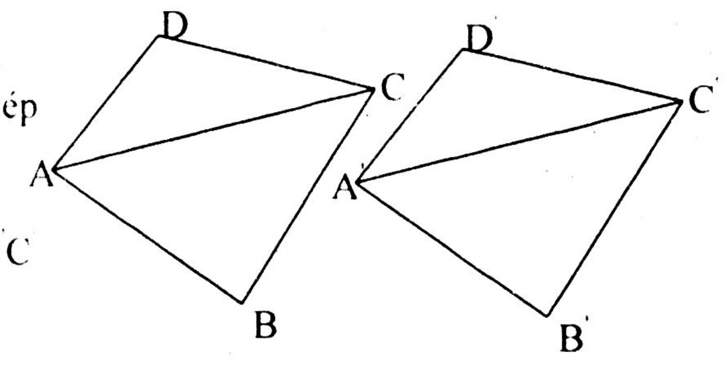
Bài 4. a) Chứng minh rằng hai tứ giác lồi có các cặp cạnh tương ứng bằng nhau và một cặp đường chéo tương ứng bằng nhau thì bằng nhau.

b) Chứng minh rằng hai tứ giác lồi có các cặp cạnh tương ứng bằng nhau và một cặp góc tương ứng bằng nhau thì bằng nhau.

c) Hai tứ giác lồi có các cặp cạnh tương ứng bằng nhau thì có bằng nhau không?

Giải

Xét hai tứ giác lồi $ABCD$ và $A'B'C'D'$ có $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CD = C'D'$, $DA = D'A'$



a) Khi $AC = A'C'$, ta có $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ nên có một phép dời hình $f: A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$. Gọi D_1 đối xứng với D' qua $A'C'$. Khi đó $\Delta ADC = \Delta A'D'C'$
$\Rightarrow \Delta ADC = \Delta A'D_1C'$
$\Rightarrow f: D \to D'$ hoặc $D \to D_1$.

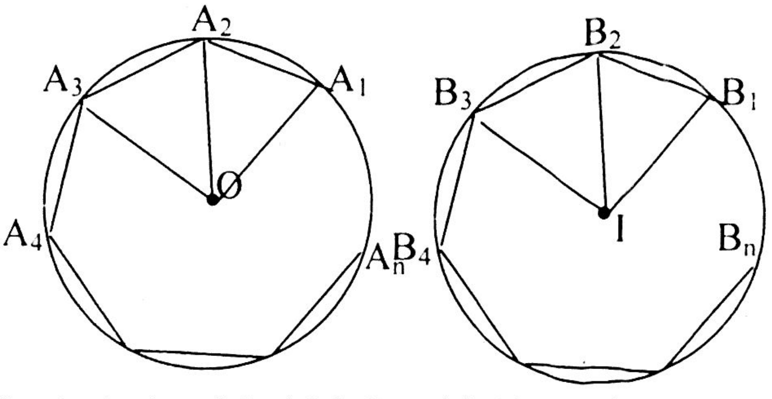
Ta có: AC và DB cắt nhau và $A'C'$ và $D'B'$ cắt nhau ⇒ $A'C'$ và D_1B' không cắt nhau nên f: D → D' ⇒ f: ABCD → $A'B'C'D'$. Vậy, hai tứ giác bằng nhau.

b) Khi $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ ⇒ $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (cạnh – góc – cạnh) ⇒ $AC = A'C'$
⇒ f: ABCD → $A'B'C'D'$. Vậy, hai tứ giác bằng nhau.

c) Lấy hình vuông, hình thoi có cạnh bằng a thì hai tứ giác đó có các cạnh tương ứng bằng nhau nhưng hai tứ giác đó không bằng nhau.

Bài 5. Đa giác lồi n cạnh gọi là n – giác đều nếu tất cả các cạnh của nó bằng nhau và tất cả các góc của nó bằng nhau. Chứng minh rằng hai n – giác đều bằng nhau khi và chỉ khi chúng có các cạnh bằng nhau.

Giải



* Khi hai n – giác đều bằng nhau, theo định nghĩa ta có: các cạnh tương ứng bằng nhau.

* Khi hai n – giác đều có các cạnh tương ứng bằng nhau Xét hai n – giác đều $A_1A_2\ldots A_n$ và $B_1B_2\ldots B_n$ nội tiếp đường tròn tâm O, tâm I và cùng bán kính R. Khi đó, ta có: $A_1A_2 = B_1B_2 \Rightarrow \Delta OA_1A_2 = \Delta OB_1B_2$

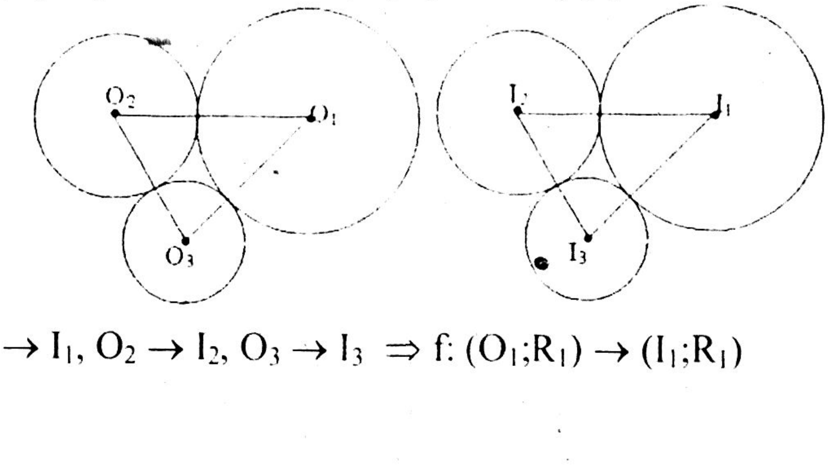
Suy ra, có một phép dời hình f: $\Delta OA_1A_2 \to \Delta OB_1B_2$.

Mặt khác: $\Delta OA_2A_3 = \Delta OB_2B_3$ ⇒ f: $A_3 \to B_3$, ... tương tự, ta có: f: $A_n \to B_n$
⇒ f: $A_1A_2\ldots A_n \to B_1B_2\ldots B_n$. Vậy, hai là n – giác đều bằng nhau.

Bài 6. Hình H_1 gồm ba đường tròn $(O_1;R_1)$, $(O_2;R_2)$, $(O_3;R_3)$ đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. Hình H_2 gồm ba đường tròn $(I_1;R_1)$, $(I_2;R_2)$, $(I_3;R_3)$ đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. Chứng tỏ rằng hai hình H_1 và H_2 bằng nhau.

Giải

Ta có: $O_1O_2 = R_1 + R_2$, $O_2O_3 = R_2 + R_3$, $O_3O_1 = R_3 + R_1$
và $I_1I_2 = R_1 + R_2$, $I_2I_3 = R_2 + R_3$, $I_3I_1 = R_3 + R_1$.
Suy ra: $O_1O_2 = I_1I_2$, $O_2O_3 = I_2I_3$, $O_3O_1 = I_3I_1 \Rightarrow \Delta O_1O_2O_3 = \Delta I_1I_2I_3$.
Suy ra, có một phép dời hình f: $\Delta O_1O_2O_3 \to \Delta I_1I_2I_3$



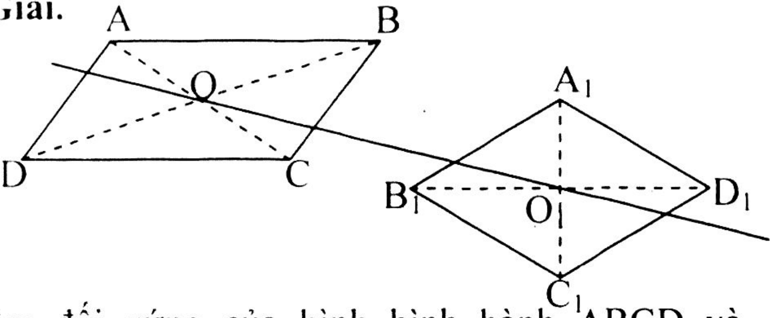
Suy ra: f: $O_1 \to I_1$, $O_2 \to I_2$, $O_3 \to I_3$ ⇒ f: $(O_1;R_1) \to (I_1;R_1)$

f: $(O_2;R_2) \rightarrow (I_2;R_2)$ và f: $(O_3;R_3) \rightarrow (I_3;R_3) \Rightarrow$ f: $H_1 \rightarrow H_2$. Vậy hai hình H_1 và H_2 bằng nhau.

Bài 7. Cho hai hình bình hành. Hãy vẽ một đường thẳng chia mỗi hình bình hành đó thành hai hình bằng nhau.

Giải.

Ta xét hai hình bình hành ABCD và $A_1B_1C_1D_1$ lần lượt có tâm O, O_1.



Ta có: O, O_1 lần lượt là tâm đối xứng của hình bình hành ABCD và $A_1B_1C_1D_1$ nên một đường thẳng bất kì đi qua tâm thì chia hình bình hành đó thành hai hình bằng nhau.

Suy ra: Đường thẳng OO_1 chia mỗi hình bình hành ABCD và $A_1B_1C_1D_1$ thành hai hình bằng nhau.

Dạng 2. Chứng minh hai hình H và H_1 đồng dạng

Phương pháp: Xác định một phép đồng dạng biến hình H thành H_1.

Bài 8. Cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có các cạnh tương ứng tỉ lệ với nhau. Chứng minh có duy nhất một phép đồng dạng biến A thành A', B thành B', C thành C'.

Giải

Đặt $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = k$. Xét phép vị tự V(A ; k): $\Delta ABC \rightarrow \Delta AB_1C_1$

$\Rightarrow AB_1 = k\,AB$, $B_1C_1 = k\,BC$ và $AC_1 = kAC \Rightarrow \Delta AB_1C_1 = \Delta A'B'C'$

Xét phép dời hình g: $\Delta AB_1C_1 \rightarrow \Delta A'B'C' \Rightarrow f = g \circ V(A\,;\,k)$: $\Delta ABC \rightarrow \Delta A'B'C'$

Ta có: V(A ; k) và g là duy nhất nên f duy nhất.

Bài 9. Chứng minh rằng hai hình vuông bất kì đồng dạng với nhau.

Giải

Xét hai hình vuông ABCD và $A'B'C'D'$ với AB = a và $A'B'$ = b.

Phép vị tự $V\left(A;\frac{b}{a}\right)$: $ABCD \rightarrow AB_1C_1D_1 \Rightarrow AB_1 = \frac{b}{a}AB = b$,

$AD_1 = \frac{b}{a}AD = b$

Suy ra: hình vuông $AB_1C_1D_1$ bằng hình vuông $A'B'C'D'$. Gọi $\varphi = (AB, A'B')$.

Phép quay $Q(A, \varphi)$: $AB_1C_1D_1 \rightarrow AB_2C_2D_2$.

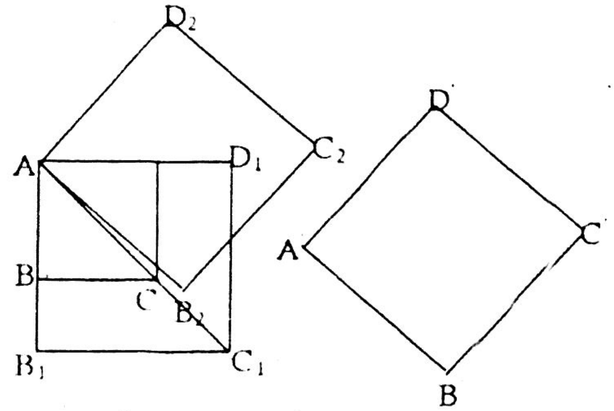
Suy ra: hình vuông $AB_1C_1D_1$ bằng hình vuông $AB_2C_2D_2$.

Phép tịnh tiến theo véc tơ $\overrightarrow{AA'}$

$T_{\overrightarrow{AA'}}: AB_2C_2D_2 \rightarrow A'B'C'D'$

$$Z = T_{\overrightarrow{AA'}} \circ Q(A, \varphi) \circ V\left(A; \frac{b}{a}\right)$$

là phép đồng dạng tâm A biến hình vuông ABCD thành hình vuông A'B'C'D' nên hình vuông ABCD và A'B'C'D' đồng dạng với nhau.



Bài 10. Chứng tỏ rằng các đa giác đều có có cùng số cạnh thì đồng dạng với nhau.

Giải

Xét hai n – giác đều $A_1A_2...A_n$ và $B_1B_2...B_n$ có tâm O, O'.

Đặt: $k = \frac{B_1B_2}{A_1A_2} = \frac{O'B_1}{OA_1}$. Khi đó, phép vị tự V (O ; k): $A_1A_2...A_n \rightarrow C_1C_2...C_n$

$\Rightarrow C_1C_2 = kA_1A_2 = B_1B_2$, $C_2C_3 = kA_2A_3 = B_2B_3$, . . . $C_nC_1 = k\,A_nA_1 = B_nB_1$

Suy ra: n – giác đều $C_1C_2...C_n$ bằng n – giác đều $B_1B_2...B_n$.

Một phép dời hình Đ: $C_1C_2...C_n \rightarrow B_1B_2...B_n$.

Suy ra: Phép đồng dạng $Z = Đ \circ V(O; k)$: $A_1A_2...A_n \rightarrow B_1B_2...B_n$

Vậy, hai n – giác đều $A_1A_2...A_n$ và $B_1B_2...B_n$ đồng dạng với nhau.

ÔN TẬP CHƯƠNG I

Bài 1. Cho đường thẳng d đi qua hai điểm phân biệt P và Q, hai điểm A và B nằm về một phía của d. Hãy xác định trên d hai điểm M, N sao cho $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ và AM + BN nhỏ nhất.

Bài 2. Cho véc tơ $\vec{u}$ và một điểm O. Với điểm M bất kì, ta gọi M_1 là điểm đối xứng với M qua O và M' là điểm sao cho $\overrightarrow{M_1M'} = \vec{u}$. Gọi F là phép biến hình biến M thành M'.

a) F có phải là một phép dời hình không?

b) Chứng tỏ rằng F là một phép đối xứng tâm.

Bài 3. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) và một điểm M thay đổi trên (O). Gọi M_1 là điểm đối xứng với M qua A, M_2 là điểm đối xứng với M_1 qua B, M_3 là điểm đối xứng với M_2 qua C.

a) Chứng tỏ rằng phép biến hình F biến điểm M thành M_3 là một phép đối xứng tâm.

b) Tìm quỹ tích điểm M_3.

Bài 4. Gọi F là một phép biến hình có tính chất sau đây: Với mỗi cặp điểm M, N và ảnh M', N' của chúng, ta có: $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ (k ≠ 0). F là phép biến hình gì?

Bài 5. Gọi F là một phép biến hình có tính chất sau đây:Với mỗi cặp điểm M, N và ảnh M' N' của chúng, ta có: $\overrightarrow{M'N'} = -\overrightarrow{MN}$. Chứng minh rằng F là phép đối xứng tâm.

Bài 6. Cho đường tròn (O) có đường kính AB. Gọi C là điểm đối xứng với A qua B và PQ là đường kính thay đổi không trùng với AB. Đường thẳng CQ cắt PA, PB lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh rằng Q là trung điểm của CM, N là trung điểm của CQ.

b) Chứng minh rằng khi PQ thay đổi, các điểm M, N nằm trên những đường tròn cố định.

Bài 7. Cho đường tròn (O; R) và điểm A cố định. Một dây cung BC thay đổi của (O;R) có độ dài không đổi, BC = m (m < 2R). Chứng minh rằng trọng tâm G của tam giác ABC nằm trên một đường tròn cố định.

Bài 8. Cho tam giác ABC và các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB.

a) Xét bốn tam giác APN, PBM, NCM, MNP. Tìm những phép dời hình biến tam giác APN thành một trong ba tam giác còn lại.

b) Phép vị tự nào biến tam giác ABC thành tam giác MNP?

c) Xét tam giác có các đỉnh là *trực tâm* của ba tam giác APN, PBM, NCM Chứng tỏ rằng tam giác đó bằng tam giác APN. Chứng tỏ rằng điều đó cũng đúng khi thay *trực tâm* bằng trọng tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp hoặc tâm đường tròn nội tiếp.

d) Với điểm O nào đó, gọi A_1, B_1, C_1 là các điểm đối xứng với O lần lượt qua các điểm M, N và P. Tìm phép vị tự biến tam giác MNP thành tam giác $A_1B_1C_1$.

e) Chứng tỏ có phép đối xứng tâm biến tam giác $A_1B_1C_1$ thành tam giác ABC.

Bài 9. Cho tam giác đều ABC, M là điểm bất kì nằm trong tam giác.

a) Gọi C', M' theo thứ tự là ảnh của C, M qua phép quay tâm A, góc quay 60^0. Chứng minh MA + MB + MC = MM' + MB + M'C'

b) Tìm vị trí điểm M để MA + MB + MC nhỏ nhất.

Bài 10. Cho tam giác ABC vuông ở A, H là chân đường cao đi qua đỉnh A.

a) Tìm một phép quay tâm H và một phép vị tự tâm H để tích của hai phép đó biến tam giác HCA thành tam giác HAB.

b) Gọi O, O_1 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác HCA và HAB. Chứng minh tam giác HOO_1 đồng dạng với tam giác ACB

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Một phép biến hình f: $\overrightarrow{AM} \to \overrightarrow{A'M'}$, điểm A cố định, M lưu động. f là một phép dời hình khi và chỉ khi thoả mãn điều kiện nào sau đây?

A) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'}$ B) $\overrightarrow{A'M'} = k\overrightarrow{AM}$

C) A'M' = AM và ($\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{A'M'}$) = φ D) Một điều kiện khác.

(ở đây k và φ là những hằng số cho trước).

2. Một phép quay biến $\overrightarrow{AB} \to \overrightarrow{A'B'}$. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AB và A'B'. Tâm quay không ở trên đường nào sau đây?

A) Đường tròn ngoại tiếp tam giác IAA'.
B) Đường tròn ngoại tiếp tam giác IBB'.
C) Đường trung trực đoạn thẳng AA'.
D) Đường trung trực đoạn thẳng BB'
E) Đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB'.

3. Cho hình thang ABCD có các đỉnh vẽ theo chiều dương, đáy lớn AB = 8 cm, đáy nhỏ CD = 4 cm. Gọi I là giao điểm của hai đường chéo và J là giao điểm của hai cạnh bên. Phép biến hình biến $\overrightarrow{AB} \to \overrightarrow{CD}$ là phép vị tự:

A) $V\left(I;\frac{1}{2}\right)$ B) $V\left(J;\frac{1}{2}\right)$ C) $V\left(I;-\frac{1}{2}\right)$ D) $V\left(J;-\frac{1}{2}\right)$.

4. Cho điểm M di động trên nửa đường tròn, đường kính AB. Vẽ dây cung AM. Trên nửa đường thẳng BM lấy điểm M' sao cho AM = BM'. Tâm của phép biến hình f: $\overrightarrow{AM} \to \overrightarrow{BM'}$ là:

A) Trung trực đoạn thẳng AB. B) Trung điểm cung $\overset{\frown}{AB}$
C) Điểm A' đối xứng với A qua B. D) Một điểm khác.

5. Cho hai điểm cố định O và I. Với mỗi điểm M có ảnh là M' sao cho tam giác OMM' nhận I là trọng tâm. Phép biến hình f: M → M' là tích của hai phép vị tự:

A) $V\left(O;\frac{1}{2}\right)\circ V(I;-2)$ B) $V\left(O;-\frac{1}{2}\right)\circ V(I;2)$

C) $V(O;2)\circ V\left(O;-\frac{1}{2}\right)$ D) $V(I;-2)\circ V\left(O;\frac{1}{2}\right)$.

6. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Đường thẳng Euler của tam giác là:

A) Đường trung tuyến BM. B) Đường trung trực cạnh AB.
C) Đường phân giác trong góc C. D) Đường cao AH.

Bài toán 1 Cho phép biến hình f: $\overrightarrow{AB} \to \overrightarrow{A'B'}$ sao cho AB = kA'B' và ($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$) = φ. Trong đó k > 0, 0 ≤ φ ≤ π là các hằng số.
Dùng giả thiết này để giải các câu 7), 8), 9).

7. f là một phép tịnh tiến khi:

A) $k = 1$ và $\varphi = 0$ B) $k > 1$ và $\varphi \neq 0$ C) $k = 1$

D) $k \neq 1$ và $\varphi \neq 0$ E) $k = 1$ và $\varphi = \pi$.

8. f là một phép quay khi:

A) $k = 1$ và $\varphi = 0$ B) $k = 1$ và $\varphi \neq 0$ C) $k \neq 1$ và $\varphi = 0$

D) $k \neq 1$ và $\varphi \neq 0$ E) $k \neq 1$ và $\varphi = 0$.

9. f là một phép vị tự có tỉ số âm khi:

A) $k = 1$ và $\varphi = 0$ B) $k = 1$ và $\varphi > 0$ C) $k \neq 1$ $\varphi < 0$

D) $k \neq 1$ và $\varphi = \pi$ E) $k \neq 1$ và $\varphi \neq 0$.

10. Cho tam giác ABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC. Phép đồng dạng biến tam giác ABC thành tam giác AMN là:

A) $Z\left(A;\ \frac{1}{2};\ 0^0\right)$ B) $Z(A;\ 2;\ 0^0)$

C) $Z\left(A;\ \frac{1}{2};\ 90^0\right)$ D) $Z(A;\ 2; 180^0)$.

11. Nếu đường thẳng Euler của tam giác ABC là đường trung tuyến AM thì tam giác ABC là:

A) Tam giác cân tại A B) Tam giác vuông tại A

C) Tam giác vuông và cân tại A D) Tam giác vuông hoặc cân tại A.

12. Cho tam giác đều ABC, trực tâm H, A' là trung điểm của BC. Phép đồng dạng biến tam giác A'HC thành tam giác A'AB là:

A) $Z\left(A';\sqrt{3};\frac{\pi}{2}\right)$ B) $Z\left(A';3;\frac{\pi}{4}\right)$ C) $Z\left(H;\sqrt{3};\frac{\pi}{2}\right)$ D) $Z\left(H;\sqrt{3};\frac{\pi}{4}\right)$

13. Cho tam giác ABC có đỉnh A cố định và các góc cho trước, B di động trên đường thẳng d. Quỹ tích của điểm C là:

A) Đường tròn B) Nửa đường thẳng C) Đường thẳng

D) Cung tròn E) Đoạn thẳng.

Bài toán 2 Cho tam giác đều ABC, có các đỉnh vẽ theo chiều dương. Trên đường thẳng BC lấy hai điểm E và F sao cho: $\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} = -2$ và $\frac{\overline{FB}}{\overline{FC}} = 2$. Gọi M là điểm di động trên cạnh BC và M' trên cạnh CA sao cho: BM = 2CM'. Dùng giả thiết này để giải các câu 14), 15), 16).

14. Phép biến hình nào biến điểm M thành điểm M':

A) Phép dời B) Phép đồng dạng

C) Phép vị tự D) Không phải ba phép trên

15. Gọi f là phép biến hình biến điểm M thành điểm M' Tâm của f nếu có là điểm nào?

A) Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

B) Giao điểm của cung lớn BAC và đường tròn, đường kính EF.

C) Giao điểm của cung nhỏ BC và đường tròn, đường kính EF.

D) Tâm là trung điểm của đoạn thẳng EF.

E) Tâm là một điểm khác.

16. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, tam giác ABC bất biến trong phép quay nào?

A) $Q\left(O;\frac{\pi}{3}\right)$ B) $Q\left(O;\frac{2\pi}{3}\right)$ C) $Q(O;\pi)$ D) $Q\left(A;\frac{\pi}{3}\right)$ E) $Q\left(A;\frac{3\pi}{2}\right)$.

17. Điểm kép của phép biến hình f:M(x ; y) → M'(x' ; y'): $\begin{cases} x' = \frac{1}{x} \\ y' = \frac{1}{y} \end{cases}$ có tọa độ là.

A) K (1 ; 2) B) K (– 1 ; – 2) C) K (–1 ; 2)

D) K (1 ; – 2) E) Cả bốn câu trên.

18. Một phép biến hình f: M(x ; y) → M'(x' ; y'): $\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y - 5 \end{cases}$ là một phép tịnh tiến thì véc tơ của phép tịnh tiến có tọa độ là:

A) (–3 ; 5) B) (3 ; – 5) C) (3 ; 5) D) (– 3 ; – 5).

19. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy. Hai đường tròn (C_1): $x^2 + y^2 - 4x = 0$ và (C_2): $x^2 + y^2 - 8x = 0$ tương ứng nhau trong phép vị tự nào?

A) Tâm O, tỉ số 2 B) Tâm O, tỉ số – 2

C) Tâm O, tỉ số $-\frac{1}{2}$ D) Tâm O, tỉ số $\frac{1}{2}$.

20. Phép tịnh tiến theo $\vec{v} = (2 ; -1)$ biến đường thẳng d: x – y + 1 = 0 thành đường thẳng d' có phương trình:

A) x – y – 2 = 0 B) x + y – 2 = 0 C) x – y + 2 = 0

D) x + y + 2 = 0 E) Một phương trình khác.

21. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho đường thẳng Δ: $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$. Tích của hai phép đối xứng trục $D_\Delta \circ D_{Ox}$ là phép quay:

A) $Q\left(O;\frac{\pi}{2}\right)$ B) $Q\left(O;-\frac{\pi}{3}\right)$ C) $Q\left(O;\frac{\pi}{3}\right)$ D) $Q\left(O;\frac{\pi}{6}\right)$ E) $Q\left(O;-\frac{\pi}{6}\right)$.

22. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho đường thẳng Δ: y = 2x và đường thẳng d: $y = -\frac{1}{2}x$. Tích của hai phép đối xứng trục $D_\Delta \circ D_d$ là phép quay:

A) $Q\left(O;\frac{\pi}{2}\right)$ B) $Q\left(O;-\frac{\pi}{2}\right)$ C) $Q(O;\pi)$ D) $Q\left(O;\frac{3\pi}{4}\right)$ E) $Q\left(O;\frac{\pi}{4}\right)$.

23. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ và phép quay $Q\left(I:\frac{\pi}{4}\right)$: (C) →(C). Tâm quay I là:

A) I (0 ; 0) B) I (2 ; 1) C) I (1 ; 2) D) I (1 ; 1)

24. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy, một phép vị tự V(I ;k) có biểu thức $\begin{cases} x' = 5x - 12 \\ y' = 5y \end{cases}$ có tâm I và tỉ số k là:

A) I (3 ; 0) và k = 5 B) I (3 ; 0) và $k = \frac{12}{5}$

C) I (0 ; 3) và k = 5 D) I (5 ; 0) và $k = \frac{1}{5}$.

25. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy, một phép vị tự tỉ số k = 2 biến A(1 ; 3) thuộc đường tròn (C) thành điểm A'(– 4 ; 6) thuộc đường tròn (C'). Phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại A là y = x + 2 thì phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C') tại A' là;

A) y = 2x + 4 B) y = x + 10 C) y = –x + 2

D) y = 2x + 14 E) y = x + 4.

Chương II:

ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ SONG SONG

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN:

Môn học nghiên cứu các tính chất của những hình có thể không cùng nằm trong một mặt phẳng gọi là Hình học không gian.

1. Điểm và mặt phẳng: *Với một điểm A và một mặt phẳng (P) có hai khả năng*

** Hoặc điểm A thuộc mp(P). Kí hiệu: A ∈ mp(P) hay A ∈ (P).*

** Hoặc điểm A không thuộc mp(P). Kí hiệu: A ∉ mp(P) hay A ∉ (P).*

2. Hình biểu diễn của một hình trong không gian:

Hình	***Hình biểu diễn trong không gian***
Đường thẳng	*Đường thẳng*
Đoạn thẳng	*Đoạn thẳng*
Hai đường thẳng song song	*Hai đường thẳng song song*
Hai đường thẳng cắt nhau	*Hai đường thẳng cắt nhau*
Điểm A thuộc đường thẳng a	*Điểm A' thuộc đường thẳng a' (a' là hình biểu diễn của a)*
Đường trông thấy	————————
Đường bị khuất	- - - - - - - - - - - - -

3. Các tính chất thừa nhận của Hình học không gian.

Tính chất 1. *Có một và chỉ một đường thẳng đi qua 2 điểm phân biệt cho trước.*

Tính chất 2. *Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua 3 điểm không thẳng hàng cho trước.*

Tính chất 3. *Tồn tại 4 điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng.*

Tính chất 4. *Nếu 2 mặt phẳng phân biệt có 1 điểm chung thì chúng có 1 đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của 2 mặt phẳng đó.*

Đường thẳng này được gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng đó.

Tính chất 5. *Trên mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.*

Định lí: *Nếu một đường thẳng đi qua 2 điểm phân biệt của một mặt phẳng thì đường thẳng ấy nằm trên mặt phẳng đó.*

4. Điều kiện xác định mặt phẳng:

** Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua 3 điểm không thẳng hàng.*

** Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua 1 đường thẳng và 1 điểm không thuộc đường thẳng đó.*

** Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua 2 đường thẳng cắt nhau.*

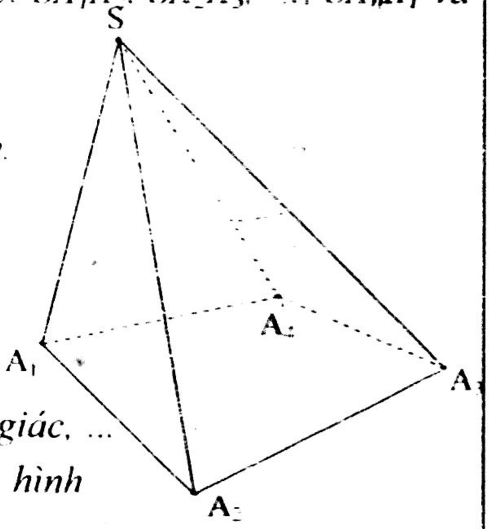
Ký hiệu: – Mặt phẳng đi qua 3 điểm không thẳng hàng A, B, C: mp(ABC).

– Mặt phẳng đi qua đường thẳng a và điểm $A \notin a$: mp(a, A).

– Mặt phẳng đi qua đường thẳng cắt nhau a và b: mp(a, b).

5. Hình chóp và hình tứ diện:

** Cho đa giác $A_1A_2...A_n$ và điểm S nằm ngoài mp(P) chứa đa giác. Nối S với các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$. Hình tạo bởi n tam giác: SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1 và đa giác gọi là hình chóp. Ký hiệu: $S.A_1A_2...A_n$.*



– S: đỉnh của hình chóp.

– Đa giác $A_1A_2...A_n$ và các điểm trong nó: mặt đáy.

Các cạnh của đa giác: cạnh đáy.

– Các đoạn thẳng: $SA_1, SA_2, ..., SA_n$: cạnh bên.

Mỗi tam giác và các điểm trong nó:

SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1: mặt bên.

– Nếu đáy của hình chóp là tam giác, tứ giác, ngũ giác, ... thì hình chóp tương ứng gọi là hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác, hình chóp ngũ giác, ...

** Cho 4 điểm A, B, C, D không đồng phẳng (tức là không cùng nằm trên một mặt phẳng). Hình gồm 4 tam giác: ABC, ACD, ADB và BCD gọi là hình tứ diện (tứ diện).*

B. CÁC DẠNG TOÁN.

Dạng 1: ***Chứng minh nhiều đường thẳng đồng qui.***

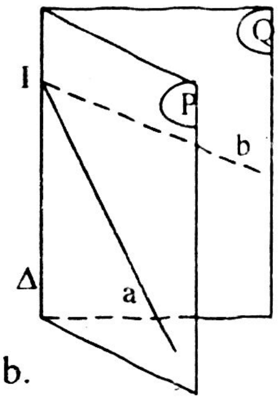
Phương pháp:

PP 1: Chứng minh các đường thẳng đó đôi một cắt nhau và không đồng phẳng.

PP 2: Chứng tỏ các đường thẳng đó cùng chia một đoạn thẳng trong các đường đó theo một tỉ số không đổi.

Thí dụ 1: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ. Trên (P) cho đường thẳng a và trên (Q) cho đường thẳng b. Chứng minh nếu a và b cắt nhau thì giao điểm phải nằm trên Δ.

Giải



Gọi I là giao điểm của a và b. Khi đó:

$I \in a;\ a \subset (P) \Rightarrow I \in (P);$

$I \in b;\ b \subset (Q) \Rightarrow I \in (Q)$

$\Rightarrow I \in (P) \cap (Q) \Rightarrow I \in \Delta.$

Vậy giao điểm của a và b nằm trên Δ.

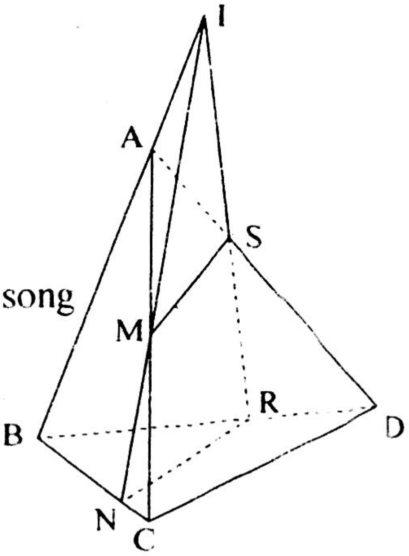
Chú ý: Ở đây ta sử dụng PP1 đối với 3 đường thẳng Δ, a và b.

Vì vậy để chứng minh 3 đường thẳng đồng qui ta có thể làm như sau:

Chứng minh 1 trong 3 đường thẳng đó là giao tuyến của hai mặt phẳng chứa hai đường thẳng còn lại và hai đường thẳng đó cắt nhau.

Thí dụ 2: Cho tứ diện ABCD. Một mặt phẳng (P) không chứa AB, cắt các cạnh AC, BC, AD, BD lần lượt tại M, N, R, S và AB, MN, RS không song song với nhau. Chứng minh AB, MN, RS đồng qui.

Giải



Ta có: * $A \in (ABC);\ A \in (ABD);$

$B \in (ABC);\ B \in (ABD);$

$\Rightarrow$ AB là giao tuyến của (ABC) và (ABD).

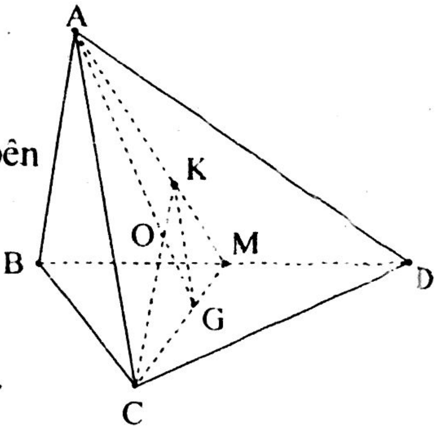
* $MN \subset (ABC);\ RS \subset (ABD)$

MN, RS cùng nằm trong mp(P) và MN không song song với RS $\Rightarrow$ MN và RS cắt nhau.

Vậy AB, MN, RS đồng qui.

Thí dụ 3: Chứng minh trong một tứ diện, các đường thẳng nối mỗi đỉnh với trọng tâm của mặt đối diện đều đồng qui.

Giải



Gọi G, I, K, H lần lượt là trọng tâm của các mặt bên BCD, ACD, ABD, ABC.

Ta cần chứng minh AG, BI, CK, DH đồng qui.

Gọi M là trung điểm của BD. Khi đó: AG và CK cùng nằm trong (AMC) nên chúng cắt nhau tại O.

Vì G là trọng tâm ΔBCD nên: $\dfrac{MG}{MC} = \dfrac{1}{3}$;

Vì K là trọng tâm ΔABD nên: $\dfrac{MK}{MA} = \dfrac{1}{3}$;

Suy ra: KG // AC $\Rightarrow \dfrac{MK}{MA} = \dfrac{KG}{AC} = \dfrac{OG}{OA} \Rightarrow \dfrac{OG}{OA} = \dfrac{1}{3}$ ⇒ CK chia đoạn AG theo tỉ số $\dfrac{1}{3}$

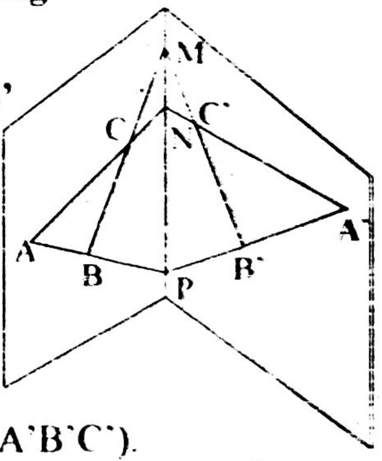
Chứng minh tương tự ta có: BI, DH cũng chia đoạn AG theo tỉ số $\dfrac{1}{3}$, tức là BI và DH cũng đi qua O.

Vậy AG, BI, CK, DH đồng qui.

Dạng 2: ***Chứng minh nhiều điểm thẳng hàng.***

Phương pháp: Để chứng minh nhiều điểm thẳng hàng, ta chứng minh chúng cùng nằm trên hai mặt phẳng phân biệt ⇒ chúng nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng đó.

Thí dụ: Cho hai tam giác ABC và A'B'C' không cùng nằm trong một mặt phẳng. Giả sử BC và B'C' cắt nhau tại M, AC và A'C' cắt nhau tại N, AB và A'B' cắt nhau tại P. Chứng minh: M, N, P thẳng hàng.



Giải

Ta có: $M \in BC$, $BC \subset (ABC) \Rightarrow M \in (ABC)$;

$M \in B'C'$, $B'C' \subset (A'B'C') \Rightarrow M \in (A'B'C')$

$\Rightarrow M \in (ABC) \cap (A'B'C')$.

Tương tự: N, P cũng là điểm chung của (ABC) và (A'B'C').

Lại có: hai tam giác ABC và A'B'C' không cùng nằm trong một mặt phẳng ⇒ hai mặt phẳng (ABC) và (A'B'C') là hai mặt phẳng phân biệt

Vậy M, N, P nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng phân biệt (ABC), (A'B'C') hay M, N, P thẳng hàng.

Dạng 3: ***Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng.***

Phương pháp: Tìm hai điểm chung phân biệt của hai mặt phẳng. Giao tuyến của chúng là đường thẳng đi qua hai điểm đó.

Thí dụ: **Cho tứ diện ABCD và một điểm I thuộc cạnh AB. Một đường thẳng a không song song với BD cắt hai cạnh BC và CD lần lượt tại J và**

K. Tìm giao tuyến của mp(I, a) lần lượt với mp(ABC), mp(ABD), mp(ACD).

Giải

* Giao tuyến của mp(I, a) với mp(ABC).

+ $I \in AB$, $AB \subset (ABC) \Rightarrow I \in (ABC)$;

$I \in (I, a)$; $\Rightarrow$ I là điểm chung của (ABC) và (I, a).

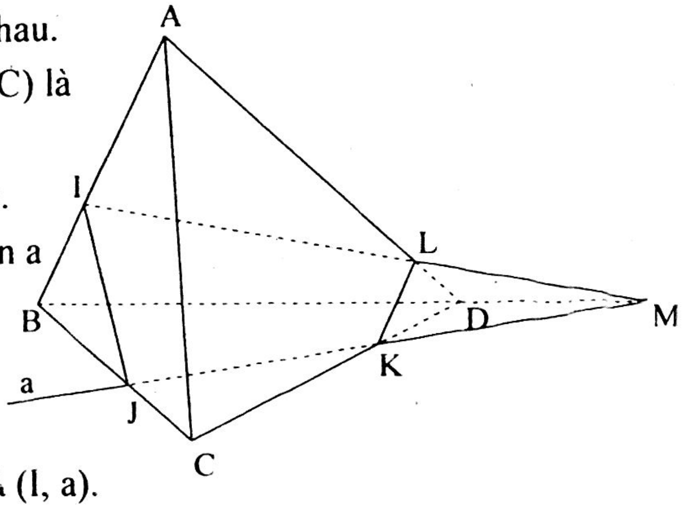
+ Vì J là giao điểm của a và BC nên $J \in a$, $a \subset (I, a) \Rightarrow J \in (I, a)$;

$J \in BC$, $BC \subset (ABC) \Rightarrow J \in (ABC)$;

$\Rightarrow$ J là điểm chung của (ABC) và (I, a).

+ Rõ ràng I, J là hai điểm khác nhau.

Vậy giao tuyến của (I, a) và (ABC) là đường thẳng IJ.



* Giao tuyến của (I, a) và (ABD).

Vì a không song song với BD nên a cắt BD tại M. Khi đó:

+ $I \in AB$, $AB \subset (ABD)$

$\Rightarrow I \in (ABD)$; $I \in (I, a)$;

$\Rightarrow$ I là điểm chung của (ABD) và (I, a).

+ Vì M là giao điểm của a và BD nên: $M \in a$, $a \subset (I, a)$

$\Rightarrow M \in (I, a)$; $M \in BD$, $BD \subset (ABD) \Rightarrow M \in (ABD)$;

$\Rightarrow$ M là điểm chung của (ABD) và (I, a).

+ Rõ ràng I, M là hai điểm khác nhau.

Vậy giao tuyến của (I, a) và (ABD) là đường thẳng IM.

* Giao tuyến của (I, a) và (ACD). Gọi L là giao điểm của IM và AD. Khi đó:

+ $L \in IM$, $IM \subset (I, a) \Rightarrow I \in (I, a)$; $L \in AD$, $AD \subset (ACD)$

$\Rightarrow$ L là điểm chung của (ACD) và (I, a).

+ Vì K là giao điểm của a và CD nên:

$K \in a$. $a \subset (I, a) \Rightarrow K \in (I, a)$; $K \in CD$, $CD \subset (ACD) \Rightarrow K \in (ACD)$;

$\Rightarrow$ K là điểm chung của (ACD) và (I, a).

+ Rõ ràng K, L là hai điểm khác nhau.

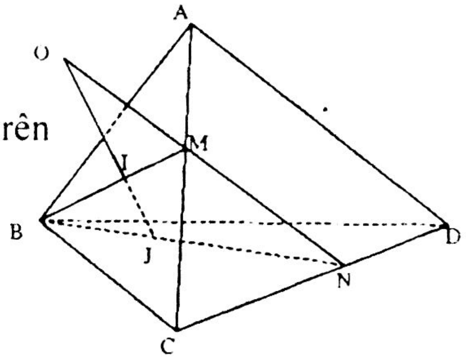
Vậy giao tuyến của (I, a) và (ACD) là đường thẳng KL.

Dạng 4: ***Tìm giao điểm của một đường thẳng với một mặt phẳng.***

Phương pháp: Để tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P), ta tìm trong (P) một đường thẳng a cắt d. Giao điểm của d và a chính là giao điểm của d và (P).

Chú ý: Đường thẳng a thường là giao tuyến của (P) và một mặt phẳng chứa d.

Thí dụ: Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là hai điểm nằm trong hai mặt phẳng (ABC), (BCD). Giả sử IJ cắt mp(ACD), hãy xác định giao điểm của chúng.



Giải

Ta có: IJ ⊂ (AIJ) ⇒ giao của IJ và (ACD) nằm trên giao tuyến của (AIJ) và (ACD).

Kéo dài BI, BJ lần lượt cắt AC, CD tại M, N.

Dễ thấy MN là giao tuyến của (AIJ) và (ACD).

Vì IJ và MN cùng thuộc (AIJ) nên cắt nhau.

Gọi O là giao điểm của IJ và MN, khi đó O là giao điểm của IJ và (ACD).

Dạng 5: ***Tìm thiết diện của một hình chóp với một mặt phẳng.***

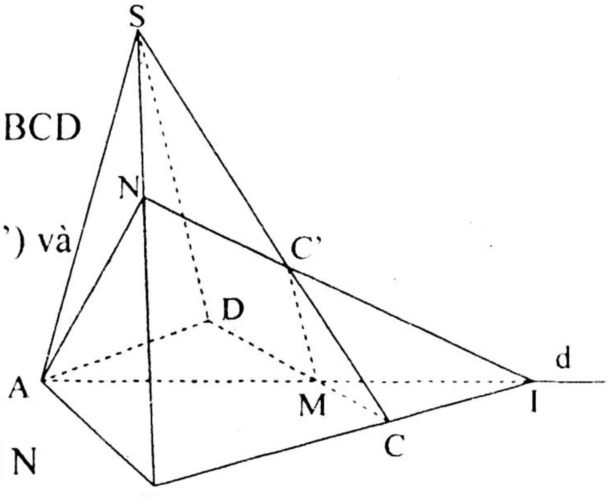
Cho hình chóp S. $A_1A_2...A_n$ và mặt phẳng (P). Nếu (P) cắt một mặt nào đó của hình chóp thì sẽ cắt mặt đó theo một đoạn thẳng gọi là đoạn giao tuyến của (P) với mặt đó. Các đoạn giao tuyến nối tiếp nhau nằm trên (P) tạo thành một đa giác gọi là thiết diện của hình chóp với (cắt bởi) (P).

Phương pháp: Để tìm thiết diện của hình chóp S. $A_1A_2...A_n$ và mặt phẳng (P), ta cần tìm các đoạn giao tuyến của (P) với các mặt của hình chóp.

Chú ý: – (P) có thể không cắt tất cả các mặt của hình chóp.

– Hai mặt phẳng nếu có 1 điểm chung thì chúng cắt nhau theo một giao tuyến.

Thí dụ: Cho hình chóp tứ giác S. ABCD. Trong mặt phẳng (ABCD) vẽ đường thẳng d qua A và không song song với các cạnh của tứ giác ABCD. Gọi C' là một điểm nằm trên cạnh SC. Tìm thiết diện của hình chóp với mp(d, C').



Giải

Vì d không song song với các cạnh của ABCD nên d cắt DC, BC lần lượt tại M, I.

Ta có: – AM là đoạn giao tuyến của (d, C') và mặt đáy ABCD.

– MC' là đoạn giao tuyến của (d, C') và mặt bên SDC.

– I, C' nằm trên (SBC), nối IC' cắt SB tại N

⇒ NC' là đoạn giao tuyến của (d, C') và mặt bên SBC.

– AN là đoạn giao tuyến của (d, C') và mặt bên SAB.

Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác AMC'N.

C – BÀI TẬP.

Bài 1. Cho ba đường thẳng Ox, Oy, Oz không đồng phẳng. Trên Ox lấy hai điểm A, A'; trên Oy lấy hai điểm B, B'; trên Oz lấy hai điểm C, C' sao cho các cặp đường thẳng AB và A'B', BC và B'C', AC và A'C' lần lượt cắt nhau tại M, N, P. Chứng minh: M, N, P thẳng hàng

Bài 2. Hai mặt phẳng (P), (Q) có giao tuyến d. Một đường thẳng qua A, B nằm trong (P) cắt d tại C. Gọi M là một điểm ở ngoài (P) và (Q), MA và MB cắt (Q) tại E, F. Chứng minh: C, E, F thẳng hàng.

Bài 3. Cho tứ giác ABCD nằm trên mặt phẳng (P) và một điểm S không thuộc (P). Hãy xác định giao tuyến của mp(SAC) và mp(SBD). Nếu ABCD không phải là hình thang, hãy xác định giao tuyến của mp(SAB) và (SCD), mp(SAD) và mp(SBC).

Bài 4. Cho hình chóp S. ABCD, M là một điểm trên cạnh BC, N là một điểm trên cạnh SD.

a) Xác định giao tuyến của các cặp mặt phẳng: (SMN) và (SAC); (MAN) và (NBD).

b) Xác định giao điểm của MN và mp(SAC).

Bài 5. Cho tứ diện ABCD. Gọi I là trung điểm của cạnh AB, M là một điểm di động trên cạnh CD, P là trung điểm của đoạn BM.

a) Chứng minh rằng IM và AP mỗi đường đều nằm trong một mặt phẳng cố định khi M di chuyển trên cạnh CD.

b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng cố định nói trên.

Bài 6. Cho hình chóp S. ABCD, trong tam giác SCD ta lấy một điểm M.

a) Tìm giao tuyến của mp(SBM) và (SAC).

b) Tìm giao điểm của đường thẳng BM và mp(SAC).

c) Tìm thiết diện của hình chóp với mp(ABM).

Bài 7. Cho hình chóp S. ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của các cạnh CB và CD, M là điểm bất kì trên cạnh SA. Tìm thiết diện của hình chóp với mp(MKH).

Bài 8. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC, BC. Trên cạnh BD ta lấy điểm K sao cho BK = 2KD.

a) Tìm giao điểm E của CD và mp(IJK). Chứng minh: DE = DC.

b) Tìm giao điểm F của AD và mp(IJK). Chứng minh: FA = 2FD.

c) Chứng minh: FK // IJ.

d) Gọi M, N là 2 điểm bất kì lần lượt nằm trên 2 cạnh AB, CD. Tìm giao điểm của MN và mp(IJK).

§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN:

1. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng phân biệt.

Hai đường thẳng phân biệt a và b trong không gian có các vị trí tương đối sau:

* *a, b đồng phẳng:*

+ Hoặc a và b không có điểm chung: a // b.

+ Hoặc a và b có điểm chung duy nhất I: a và b cắt nhau tại I (I là giao điểm).

* *a và b không đồng phẳng: a và b chéo nhau.*

2. Hai đường thẳng song song: $a // b \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \text{ đồng phẳng} \\ a, b \text{ không có điểm chung} \end{cases}$

Tính chất:

- $A \notin a \Rightarrow$ *có một và chỉ một b:* $A \in b$, $b // a$.
- $a \neq b$: $a // c$, $b // c \Rightarrow a // b$
- (P), (Q), (R): $(P) \cap (Q) = a$; $(Q) \cap (R) = b$; $(R) \cap (P) = c$; $a \neq b$; $b \neq c$; $c \neq a$ $\Rightarrow$ *hoặc* $a // b // c$, *hoặc a, b, c đồng qui.*
- $(P) \neq (Q)$: $a \subset (P)$, $b \subset (Q)$, $a // b$; $(P) \cap (Q) = c \Rightarrow$ *hoặc* $a // b // c$, *hoặc a trùng c, hoặc b trùng c.*

B. CÁC DẠNG TOÁN.

Dạng 1: ***Chứng minh hai đường thẳng song song.***

Phương pháp:

PP 1. Dùng định nghĩa: Để chứng minh a // b, ta chứng minh:

- a, b đồng phẳng;
- a, b không có điểm chung.

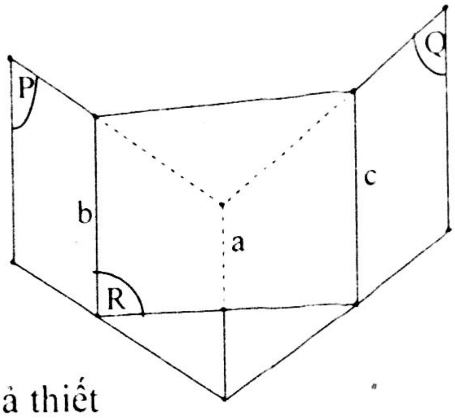
PP 2. Chứng minh chúng cùng song song với một đường thẳng thứ ba:

Để chứng minh a // b, ta chứng minh: $\exists$ c, $c \neq a$, $c \neq b$: a // c và b // c.

Thí dụ 1: Cho ba mặt phẳng (P), (Q), (R) đôi một cắt nhau và không có một điểm chung nào của cả ba mặt phẳng. Chứng minh những giao tuyến của chúng song song với nhau.

Giải

Gọi a, b, c lần lượt là giao tuyến của (P) và (Q), (P) và (R), (Q) và (R). Ta cần chứng minh: a // b // c // a.



* Xét hai giao tuyến a và b ta có: a, b ⊂ (P):

+ Nếu a và b có điểm chung O thì

$O \in a \Rightarrow O \in (P), O \in (Q)$;

$O \in b \Rightarrow O \in (P), O \in (R)$

⇒ O là điểm chung của (P), (Q), (R): trái giả thiết (P), (Q), (R) không có điểm chung. Vậy a và b không có điểm chung.

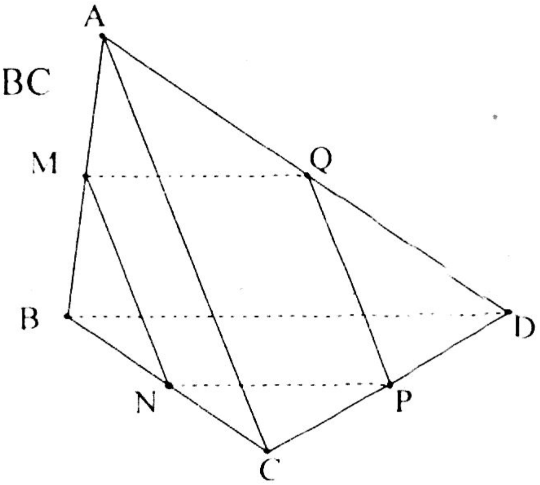
Suy ra a // b.

* Tương tự, ta chứng minh được: b // c, c // a.

Vậy: a // b // c // a.

Thí dụ 2: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh: MNPQ là hình bình hành.

Giải



Ta có: * MN là đường trung bình của ΔABC

$\Rightarrow MN // AC; MN = \frac{1}{2}AC$ (1);

* PQ là đường trung bình của ΔACD

$\Rightarrow PQ // AC; PQ = \frac{1}{2}AC$ (2);

Từ (1) và (2) ⇒ MN // PQ; MN = PQ.

Vậy MNPQ là hình bình hành.

Dạng 2: ***Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng lần lượt chứa hai đường thẳng song song.***

Phương pháp: Cho 2 mặt phẳng (P) ≠ (Q): a ⊂ (P), b ⊂ (Q), a // b.

Nếu (P) và (Q) cắt nhau thì ta xác định giao tuyến như sau: Tìm 1 điểm chung của (P) và (Q). Khi đó giao tuyến của (P) và (Q) là đường thẳng qua điểm chung đó và song song với a và b.

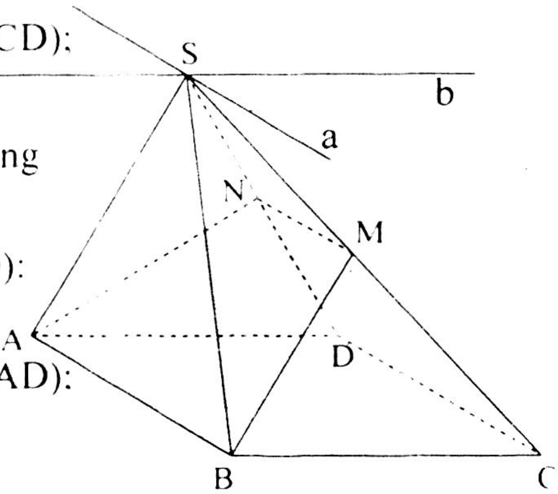
Thí dụ: Cho hình chóp S. ABCD có đáy ABCD là hình bình hành.

a) Hãy xác định giao tuyến của các mặt phẳng: (SAB) và (SCD), (SBC) và (SAD).

b) M là một điểm thuộc cạnh SC, tìm thiết diện của hình chóp với mp(ABM). Thiết diện đó là hình gì ?

Giải

a) * Xác định giao tuyến của (SAB) và (SCD):



Ta có: – S là điểm chung của (SAB) và (SCD);

– $AB \subset (SAB)$; $CD \subset (SCD)$; $AB \parallel CD$

$\Rightarrow$ Giao tuyến của (SAB) và (SCD) là đường thẳng a qua S, song song với AB và CD.

* Xác định giao tuyến của (SBC) và (SAD):

Ta có: – S là điểm chung của (SBC) và (SAD);

– $BC \subset (SBC)$; $AD \subset (SAD)$; $BC \parallel AD$

$\Rightarrow$ Giao tuyến của (SBC) và (SAD) là đường thẳng b qua S, song song với AD và BC.

b) Ta có: – AB là đoạn giao tuyến của (ABM) và mặt đáy ABCD;

– BM là đoạn giao tuyến của (ABM) và mặt bên SBC;

– M là điểm chung của (ABM) và (SDC); $AB \subset (ABM)$, $CD \subset (SDC)$, $AB \parallel CD$ $\Rightarrow$ giao tuyến của (ABM) và (SDC) là đường thẳng qua M, song song với AB và DC. Gọi N là giao điểm của đường thẳng đó và SD, ta có MN là đoạn giao tuyến của (ABM) và mặt bên SDC.

– Từ kết quả trên AN là đoạn giao tuyến của (ABM) và mặt bên SAD.

Vậy thiết diện của hình chóp và (ABM) là tứ giác ABMN.

Rõ ràng: ABMN là hình thang vì $MN \parallel AB$.

C – BÀI TẬP.

Bài 1. Chứng minh trong một tứ diện, các đoạn nối trung điểm các cặp cạnh đối đồng qui.

Bài 2. Cho hình chóp S. ABCD với đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD.

a) Chứng minh MNPQ là hình bình hành.

b) Gọi I là một điểm trên cạnh BC. Tìm thiết diện của hình chóp với mp(MNI). Thiết diện là hình gì ?

Bài 3. Cho tứ diện ABCD. P, Q, R, S lần lượt nằm trên các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh nếu P, Q, R, S đồng phẳng thì:

a) PQ, RS, AC hoặc song song hoặc đồng qui.

b) PS, RQ, BD hoặc song song hoặc đồng qui.

Bài 4. Cho hình bình hành ABCD. Gọi S là một điểm ở ngoài mp(ABCD); A', B' là trung điểm của SA, SB. Một mp(P) di động nhưng luôn chứa A'B', cắt SC, SD tại C', D'.

a) Tứ giác A'B'C'D' là hình gì ?

b) Gọi I là giao của A'D' và B'C'. Chứng minh I luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

Bài 5. Cho hình chóp S. ABCD, đáy ABCD là hình chữ nhật. Gọi G_1; G_2; G_3. G_4 lần lượt là trọng tâm của bốn mặt bên SAB, SBC, SCD, SDA.
Chứng minh: $G_1G_2S_3G_4$ là hình thoi.

§3. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng:

Đường thẳng a và mp(P) trong không gian có các vị trí tương đối sau:

- *a và (P) có 2 điểm chung phân biệt:* $a \subset (P)$.
- *a và (P) có 1 điểm chung duy nhất: a và (P) cắt nhau.*
- *a và (P) không có điểm chung:* $a \,//\, (P)$.

2. Đường thẳng song song với mặt phẳng:

$a \,//\, (P) \Leftrightarrow$ *a và (P) không có điểm chung.*

Điều kiện để một đường thẳng song song với một mặt phẳng:

$b \subset (P);\ a \not\subset (P);\ a \,//\, b \Rightarrow a \,//\, (P)$.

Tính chất:

- $a \,//\, (P) \Rightarrow$ *Có* $b \subset (P): b \,//\, a$.
- $a \,//\, (P),\ \forall (Q): a \subset (Q),\ (P) \cap (Q) = b \Rightarrow a \,//\, b$.
- $(P) \neq (Q),\ a \,//\, (P),\ a \,//\, (Q),\ (P) \cap (Q) = b \Rightarrow a \,//\, b$.

B. CÁC DẠNG TOÁN.

Dạng 1: ***Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng.***

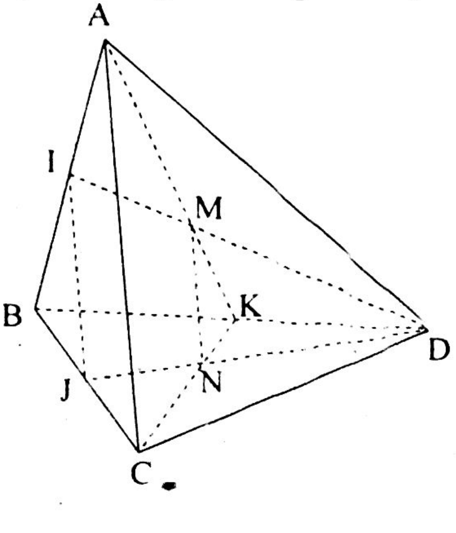
Phương pháp: Để chứng minh d // (P) (d không nằm trong (P)), ta cần chứng minh: $\exists\, a \subset (P): a \,//\, d$.

Thí dụ 1: Cho tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABD và BCD.

a) Chứng minh rằng MN // (ACD), MN // (ABC).

b) Xác định giao tuyến của (DMN) và (ABC). Chứng minh giao tuyến này song song với MN. Tính: $\frac{MN}{IJ}$.

Giải



a) Gọi K là trung điểm của BD. Vì M, N là trọng tâm của các tam giác ABD, BCD nên A, M, K thẳng hàng và C, N, K thẳng hàng tức là AM và CN cắt nhau tại K.

Ta có: $\frac{KM}{KA} = \frac{1}{3}; \frac{KN}{KC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{KM}{KA} = \frac{KN}{KC}$

$\Rightarrow MN // AC$.

Từ đó: * $MN // AC$, $AC \subset (ACD) \Rightarrow MN // (ACD)$.

* $MN // AC$, $AC \subset (ABC) \Rightarrow MN // (ABC)$.

b) Trong mp(ABD): DM cắt AB tại I; trong mp(BCD): DN cắt BC tại J.

Khi đó: I, J là hai điểm chung của (DMN) và (ABC) $\Rightarrow$ IJ là giao tuyến của (DMN) và (ABC).

Ta có: vì M là trọng tâm của tam giác ABD nên I là trung điểm của AB.

Vì N là trọng tâm của tam giác BCD nên J là trung điểm của BC

$\Rightarrow$ IJ là đường trung bình của tam giác ABC $\Rightarrow IJ // AC$; $IJ = \frac{1}{2}AC$.

Mặt khác: $MN // AC$ (theo câu a) nên $MN // IJ$.

Ta có: $IJ = \frac{1}{2}AC$;

$$\frac{MN}{AC} = \frac{KM}{KA} = \frac{1}{3} \Rightarrow MN = \frac{1}{3}AC.$$

$$\text{Từ đó: } \frac{MN}{IJ} = \frac{\frac{1}{3}AC}{\frac{1}{2}AC} = \frac{2}{3}.$$

Dạng 2: ***Tìm thiết diện của một hình chóp với một mặt phẳng cho trước.***

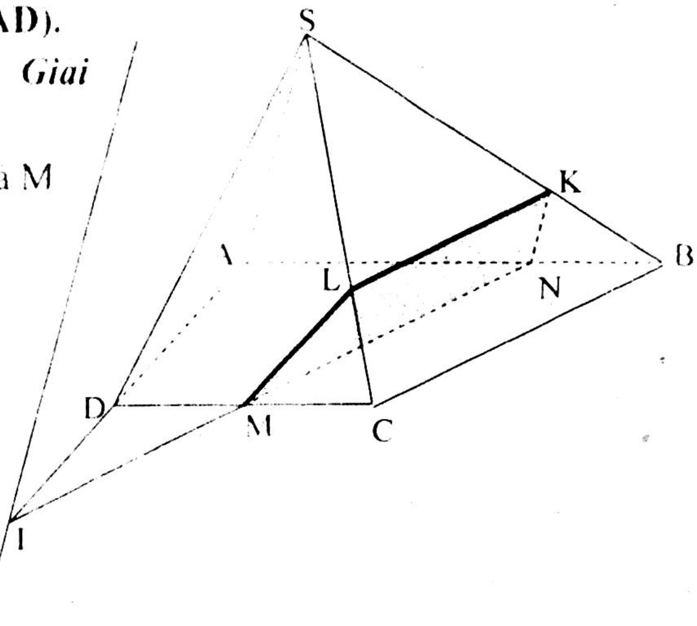
Phương pháp: Chú ý tính chất: $a // (P)$, $\forall (Q)$: $a \subset (Q)$, $(P) \cap (Q) = b \Rightarrow a // b$.

Thí dụ: Cho hình thang ABCD, đáy lớn AB và một điểm S ở ngoài mặt phẳng (ABCD). Gọi M là một điểm trên đoạn CD (M không trùng C và D), (P) là mặt phẳng qua M và song song với SA và BC.

a) Tìm thiết diện của hình chóp S. ABCD với (P). Thiết diện là hình gì ?

b) Tìm giao tuyến của (P) và (SAD).

Giải



a) Ta có:

* (P) và (ABCD) có điểm chung là M

(P) // BC; $BC \subset (ABCD)$

$\Rightarrow$ giao tuyến của (P) và (ABCD) là đường thẳng qua M và song song với BC, cắt AB tại N

$\Rightarrow$ MN là đoạn giao tuyến của (P) và mặt đáy ABCD

* (P) và (SAB) có điểm chung là N

(P) // SA; $SA \subset (SAB)$

⇒ giao tuyến của (P) và (SAB) là đường thẳng qua N và song song với SA. cắt SB

tại K ⇒ NK là đoạn giao tuyến của (P) và mặt bên SAB.

* (P) và (SBC) có điểm chung là K; (P) // BC; BC ⊂ (SBC)

⇒ giao tuyến của (P) và (SBC) là đường thẳng qua K và song song với BC, cắt SC

tại L ⇒ KL là đoạn giao tuyến của (P) và mặt bên SBC.

* M, L là 2 điểm chung của (P) và (SCD) ⇒ ML là đoạn giao tuyến của (P) và mặt bên SCD.

Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác MNKL.

Theo trên ta có: MN // BC // KL ⇒ MN // KL hay MNKL là hình thang.

b) Trong mp(ABCD) kéo dài MN và AD cắt nhau tại I. Khi đó:

- I là điểm chung của (P) và (SAD);
- SA // (P), SA ⊂ (SAD)

⇒ giao tuyến của (P) và (SAD) là đường thẳng qua I và song song với SA.

C – BÀI TẬP.

Bài 1. Cho hình chóp S. ABCD, đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD.

a) Chứng minh MN song song với các mặt phẳng (SBC) và (SAD).

b) Gọi P là trung điểm của cạnh SA. Chứng minh SB, SC đều song song với mp(MNP).

Bài 2. Cho hình chóp S. ABCD, đáy là tứ giác ABCD. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng qua O, song song với AB và SC. Thiết diện là hình gì ?

Bài 3. Cho hình chóp S. ABCD, đáy ABCD là hình bình hành. Một mặt phẳng (P) chuyển động luôn song với BC và đi qua trung điểm C' của cạnh bên SC cắt các cạnh SA, SB, SD lần lượt tại A', B' D'.

a) A'B'C'D' là hình gì ?

b) Chứng minh (P) luôn đi qua một đường thẳng cố định.

c) Gọi M là giao của A'C' và B'D'. Chứng minh khi (P) thay đổi như trên, M luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

Bài 4. Cho hình chóp S. ABCD, đáy ABCD là hình bình hành, G là trọng tâm của tam giác SBD. Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (P) qua G, song song với SB và AC.

Bài 5. Cho hình chóp tứ giác S. ABCD và điểm M trên cạnh SC. Mặt phẳng (P) qua AM và song song với BD.

a) Chứng minh (P) luôn đi qua một đường thẳng cố định khi M chuyển động trên SC.

b) Xác định thiết diện của hình chóp với (P) (gọi giao điểm của (P) với SB, SD lần lượt là K, H).

c) Gọi giao của MK và BC là E; MH và CD là F. Chứng minh: A, E, F thẳng hàng.

Bài 6. Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi M và N là hai điểm chạy trên AD và BE sao cho: $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NE}$.

Chứng minh đường thẳng MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.

§4. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

*1. **Vị trí tương đối của hai mặt phẳng phân biệt:***

Hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q) có các vị trí tương đối sau:

- *(P) và (Q) có điểm chung: (P) và (Q) cắt nhau theo một đường thẳng (giao tuyến).*
- *(P) và (Q) không có điểm chung: $(P) // (Q)$.*

*2. **Hai mặt phẳng song song:***

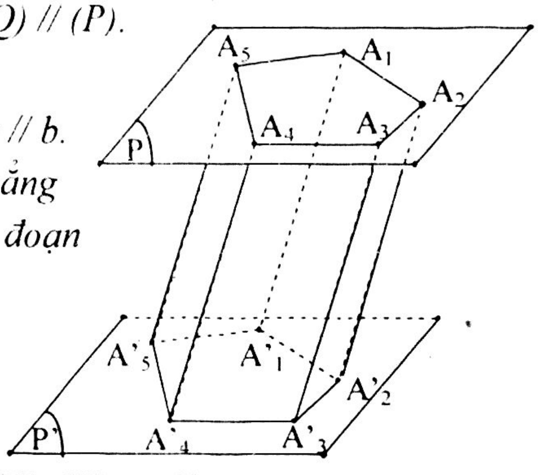
$(P) // (Q) \Leftrightarrow$ (P) và (Q) không có điểm chung.

Điều kiện để hai mặt phẳng song song:

$a, b \subset (P)$: a và b cắt nhau, $a // (Q)$, $b // (Q) \Rightarrow (P) // (Q)$.

Tính chất:

- *Với $A \notin (P)$, có một và chỉ một (Q): $A \in (Q)$, $(Q) // (P)$.*
- *$a // (P) \Rightarrow$ có một và chỉ một (Q): $a \subset (Q)$, $(Q) // (P)$.*
- *$(P) \neq (Q)$: $(P) // (R)$, $(Q) // (R) \Rightarrow (P) // (Q)$.*
- *$(P) // (Q)$, $(R) \cap (P) = a \Rightarrow (R) \cap (Q) = b$; $a // b$.*



*3. **Định lí Ta-let trong không gian:** Ba mặt phẳng song song chắn ra trên hai cát tuyến bất kì các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.*

$(P) // (Q) // (R)$:

$a \cap (P) = A$; $a \cap (Q) = B$; $a \cap (R) = C$;

$b \cap (P) = A'$; $b \cap (Q) = B'$; $b \cap (R) = C'$;

$$\Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

4. Hình lăng trụ và hình hộp:

** (P) // (P'): Đa giác $A_1A_2...A_n$ trên (P). Qua A_1, A_2, ...A_n vẽ các đường thẳng song song cắt(P') tại A'_1, A'_2, ...A'_n. Hình hợp bởi các hình bình $A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_2$, ..., $A_nA_1A'_1A'_n$ và hai đa giác $A_1A_2...A_n$ và $A'_1A'_2...A'_n$ gọi là hình lăng trụ. Ký hiệu: $A_1A_2...A_n$. $A'_1A'_2...A'_n$.*

** Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp.*

B. CÁC DẠNG TOÁN.

Dạng 1: ***Chứng minh hai mặt phẳng song song.***

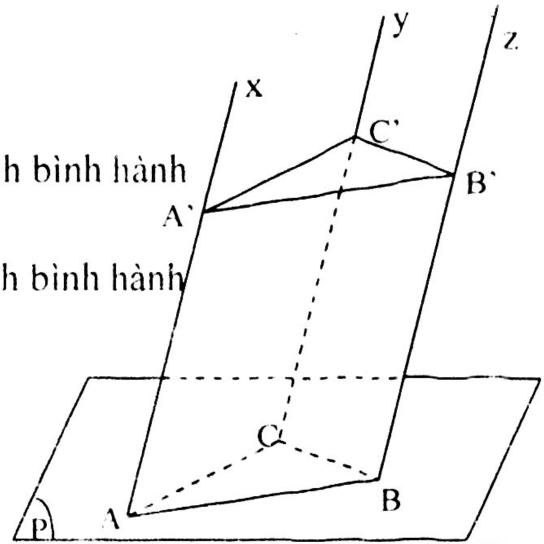
Phương pháp: Để chứng minh (P) // (Q) ta cần chứng minh:

PP 1. Trong (P) (hoặc (Q)) có hai đường thẳng cắt nhau a và b sao cho a // (Q), b // (Q) (hoặc a // (P), b // (P)).

PP 2. Có a, b $\subset$ (P): a cắt b; a', b'$\subset$ (Q): a' cắt b' và a // a', b // b'.

Thí dụ: Cho tam giác ABC nằm trong mp(P). Trên ba nửa đường thẳng Ax, By, Cz cùng nằm về một phía đối với (P) lần lượt lấy các điểm A', B', C' sao cho AA' = BB' = CC'.

Chứng minh: (P) // (A'B'C').



Giải

Vì Ax // By; AA' = BB' nên ABB'A' là hình bình hành

$\Rightarrow$ A'B' // AB (1)

Vì Ax // Cz; AA' = CC' nên ACC'A' là hình bình hành

$\Rightarrow$ A'C' // AC (2)

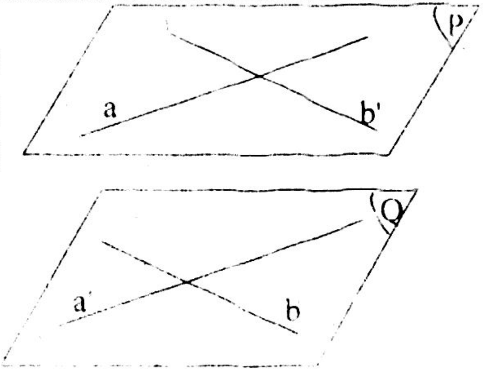
Mặt khác: AB, AC thuộc mp(ABC);

A'B', A'C' thuộc mp(A'B'C') (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow$ (A'B'C') // (P).

Thí dụ 2: Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Gọi (P) là mặt phẳng chứa a và song song với b, (Q) là mặt phẳng chứa b và song song với a.

Chứng minh: (P) // (Q).



Giải

Ta có: b // (P) ⇒ có b' ⊂ (P) sao cho b' // b.

Mặt khác: b ⊂ (Q) nên b' // (Q).

Vì a và b chéo nhau nên a cắt b'.

Như vậy ta có: a, b' ⊂ (P)

a // (Q); b' // (Q) và a cắt b'

⇒ (P) // (Q).

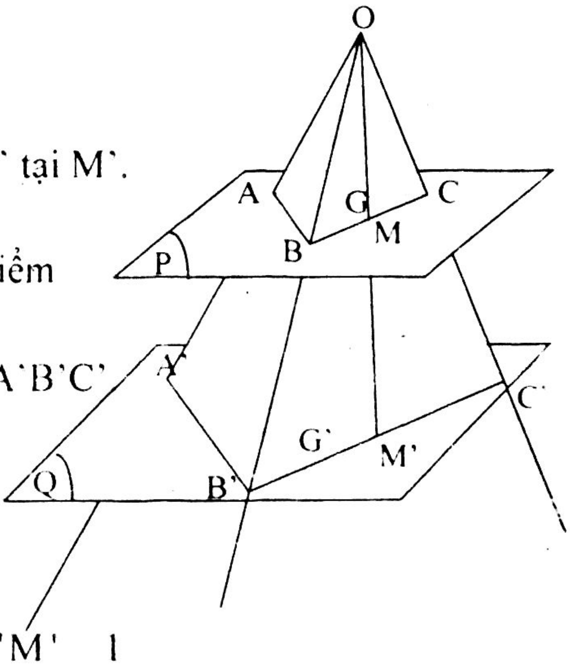
Dạng 2: ***Định lí Talet trong không gian.***

Phương pháp: Sử dụng định lí.

Thí dụ: Mặt phẳng (P) cắt 3 đường thẳng không đồng phẳng Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C; mặt phẳng (Q) song song với mp(P) cắt các đường thẳng trên lần lượt tại A', B', C'.

a) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, chứng minh rằng OG đi qua trọng tâm của tam giác A'B'C'.

b) Chứng minh ΔABC ~ ΔA'B'C'.



Giải

a) Gọi M là trung điểm của BC, OM cắt B'C' tại M'.

Khi đó: M' là trung điểm của B'C'.

Nối OG cắt A'M' tại G' ta có G' là giao điểm của OG và mp(A'B'C').

Ta cần chứng minh G' là trọng tâm của ΔA'B'C'.

Vì (P) // (Q) nên AM // A'M'.

Khi đó, xét tam giác OA'M', ta có:

$$\frac{AG}{A'G'}=\frac{OG}{OG'}=\frac{GM}{G'M'}$$

$$\Rightarrow \frac{AG}{A'G'}=\frac{GM}{G'M'}\Rightarrow \frac{GM}{AG}=\frac{G'M'}{A'G'}\Rightarrow \frac{G'M'}{A'G'}=\frac{1}{2}$$

⇒ G' là trọng tâm của tam giác A'B'C'.

b) Vì (P) // (Q) nên: $\frac{AB}{A'B'}=\frac{OB}{OB'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{OC}{OC'}=\frac{AC}{A'C'}\Rightarrow \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}$

⇒ ΔABC ~ ΔA'B'C'.

Dạng 3: ***Một số bài toán liên quan đến hình lăng trụ – hình hộp.***

Phương pháp: Chú ý các tính chất sau của hình lăng trụ:

- Các cạnh bên của hình lăng trụ song song và bằng nhau.
- Các mặt bên là các hình bình hành.

- Hai đa giác đáy có các cạnh đôi một song song và bằng nhau ⇒ hai đa giác đó bằng nhau.

Thí dụ 1: Cho hình lăng trụ tam giác ABC. A'B'C'. Gọi I, K, G lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, A'B'C', A'CC'. Chứng minh rằng:

a) Mp(IKG) song song với mp(BB'CC')

b) Xác định thiết diện của lăng trụ với mp(IKG). Thiết diện là hình gì?

c) Gọi H là trung điểm của BB', chứng minh (AHI) // (A'KG).

Giải

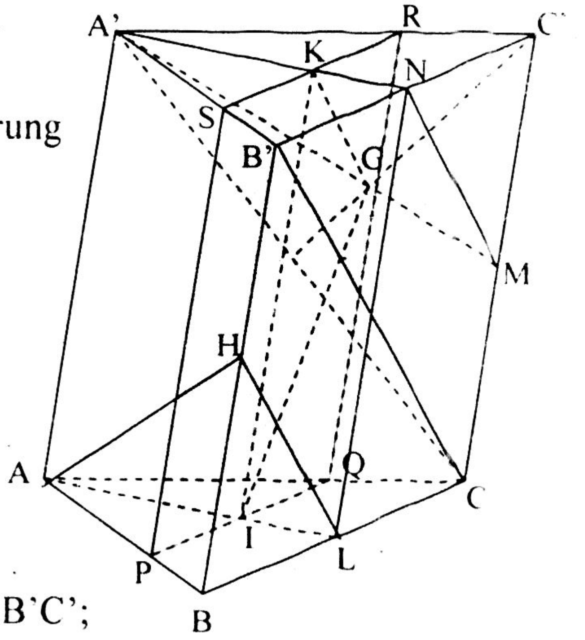
a) Gọi N, L lần lượt là trung điểm của B'C' và BC.

Ta có: NL // BB' // AA' ⇒ NL // AA' ⇒ AA'NL là hình bình hành ⇒ AL = A'N.

Vì K, I lần lượt là trọng tâm của ΔA'B'C' và ΔABC nên:

$$KN = \frac{1}{3}A'N = \frac{1}{3}AL = IL \Rightarrow$$ KNLI là hình bình hành ⇒ KI // NL.

Suy ra: KI // (BB'C'C) (vì NL ⊂ (BB'C'C)) (1)



Trong mp(A'CC') gọi M là giao điểm của A'G và CC'.

Vì G là trọng tâm của ΔA'CC' nên M là trung điểm của CC'. Khi đó: Xét ΔA'MN có:

$$\frac{A'K}{A'N} = \frac{2}{3} = \frac{A'G}{A'M} \Rightarrow KG \,//\, MN$$

Suy ra: KG // (BB'C'C)

(vì MN ⊂ (BB'C'C)) (2)

Từ (1) và (2) ⇒ (IKG) // (BB'C'C).

b) Ta có:

* (IKG) // (BB'C'C).

Giao tuyến của (BB'C'C) và (A'B'C') là B'C';

K ∈ (A'B'C')

⇒ giao tuyến của (IKG) và (A'B'C') là đường thẳng qua K và song song với B'C', giả sử cắt A'B', A'C' lần lượt tại R, S.

* Tương tự: giao tuyến của (IKG) và (ABC) là đường thẳng qua I và song song với BC, giả sử cắt AB, AC lần lượt tại P, Q.

Vậy thiết diện của lăng trụ và mp(IKG) là tứ giác PQRS.

Khi đó: vì RS // B'C', PQ // BC, B'C' // BC ⇒ RS // PQ (3)

Mặt khác: $\frac{PQ}{BC} = \frac{AI}{AL} = \frac{2}{3} = \frac{A'K}{A'N} = \frac{RS}{B'C'} \Rightarrow \frac{PQ}{BC} = \frac{RS}{B'C'}$

$\Rightarrow$ PQ = RS (vì BC = B'C') (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ PQRS là hình bình hành.

c) Theo câu b, ta có: KG // MN, mà MN // CB' // LH $\Rightarrow$ KG // LH (5)

Mặt khác: A'N // AL (theo a) (6)

Rõ ràng: AL và LH nằm trên (AHI), KG và A'N nằm trên (A'KG) (7)

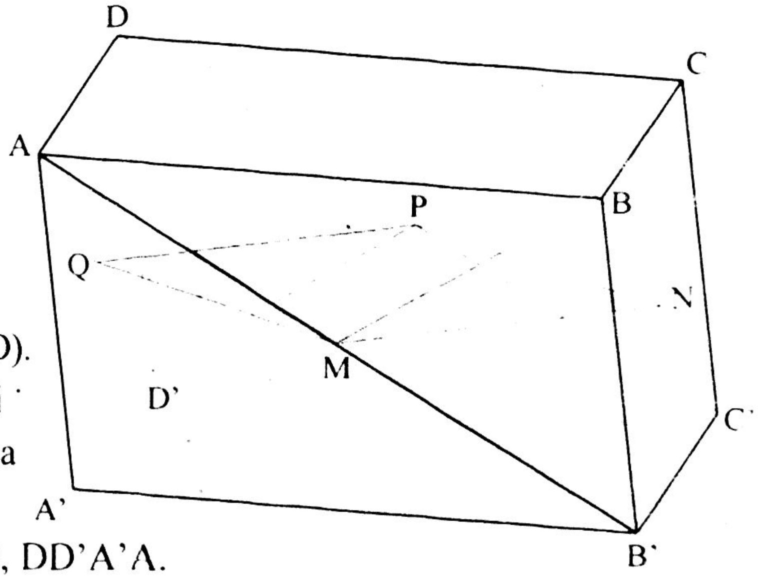
Từ (5), (6) và (7) $\Rightarrow$ (AHI) // (A'KG).

Thí dụ 2: Cho hình hộp ABCD. A'B'C'D'. Chứng minh rằng:

a) (AB'D') // (C'BD).

b) Bốn tâm đối xứng của bốn mặt bên là bốn đỉnh của một hình bình hành.

Giải



a) Ta có: AB // D'C'; AB = D'C'

$\Rightarrow$ ABC'D' là hình bình hành

$\Rightarrow$ AD' // C'B (1).

Tương tự: BB'D'D là hình bình hành

$\Rightarrow$ B'D' // BD (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ (AB'D') // (C'BD).

b) Gọi M, N, P, Q lần lượt là tâm đối xứng (giao của hai đường chéo của các hình bình hành) của các mặt bên AA'B'B, BB'C'C, CC'D'D, DD'A'A.

Khi đó:

Xét tam giác AB'D': QM là đường trung bình

$\Rightarrow$ QM // D'B' và $QM = \frac{1}{2}B'D'$.

Xét tam giác CD'B': PN là đường trung bình $\Rightarrow$ PN // B'D' và $PN = \frac{1}{2}B'D'$.

Vậy QM // PN và QM = PN hay MNPQ là hình bình hành.

C – BÀI TẬP.

Bài 1. Trong mp(P) cho tam giác ABC. Ta lấy điểm S ở ngoài (P) sao cho SA = SB = SC. Chứng minh các đường phân giác ngoài tại S của các tam giác SAB, SBC, SCA cùng nằm trong một mặt phẳng.

Bài 2. Cho hình bình hành ABCD, ta dựng các nửa đường thẳng Ax, By, Cz, Dt song song với nhau và nằm về một phía đối với mp(ABCD). Mp(P) cắt bốn nửa đường thẳng trên lần lượt tại A', B', C', D'.

a) Chứng minh mp(AA', BB') // mp(CC', DD').

b) Chứng minh A'B'C'D' là hình bình hành.

c) Chứng minh: AA' + CC' = BB' + DD'.

Bài 3. Cho hình chóp S. ABCD, đáy ABCD là hình bình hành. Mp (P) qua điểm M của cạnh bên SA và song song với mặt đáy. Xác định thiết diện của hình chóp với mp(P). Thiết diện là hình gì ?

Bài 4. Cho hình chóp tứ giác S. ABCD và điểm M trên cạnh SC. Xác định thiết diện của hình chóp với mp(P) qua M và song song với (SAB).

Bài 5. Cho hình chóp tứ giác S. ABCD, M là trung điểm của cạnh bên SA, N là trung điểm của cạnh bên SC.

a) Xác định mặt phẳng qua M, song với (SBD); mặt phẳng qua N, song song với (SBD).

b) Gọi I, J là giao của hai mặt phẳng trên với AC. Chứng minh: AC = 2IJ.

Bài 6. Cho hình lăng trụ tam giác ABC. A'B'C'. Gọi I, I' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, B'C'.

a) Chứng minh AI // A'I'.

b) Tìm giao của IA' và (AB'C').

c) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (AB'C') và (BA'C').

Bài 7. Cho hình lăng trụ tam giác ABC. A'B'C'. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AA', AC.

a) Xác định thiết diện của lăng trụ với mp(MNB').

b) Gọi P là trung điểm của B'C'. Xác định thiết diện của lăng trụ với mp(MNP).

Bài 8. Cho hình hộp ABCD. A'B'C'D' có các cạnh AA', BB', CC', DD' song song với nhau.

a) Chứng minh mp(ACB') // mp(A'C'D).

b) Chứng minh đường chéo BD' đi qua trọng tâm G_1, G_2 của hai tam giác ACB' và A'C'D

c) Chứng minh G_1 và G_2 chia đoạn BD' thành ba phần bằng nhau.

Bài 9. Cho lăng trụ tứ giác ABCD. A'B'C'D', hai đường chéo AC' và A'C cắt nhau tại I, hai đường chéo BD' và B'D cắt nhau tại J. Chứng minh khoảng cách IJ bằng độ dài đoạn nối trung điểm hai đường chéo đáy.

Bài 10. Cho hình hộp ABCD. A'B'C'D' và một điểm M trên đoạn AD. Xác định thiết diện của hình hộp với mp(P) qua M, song song với BD, AC'

Bài 11. Cho ba mặt phẳng (P), (Q), (R) song song với nhau. Hai đường thẳng a, a' cắt ba mặt phẳng ấy theo thứ tự tại A, B, C và A', B', C'. Biết AB = m; BC = n, A'C' = k. Tính độ dài A'B' và B'C'.

Bài 12. (Định lí đảo của định lí Talet).

Cho hai đường thẳng a và a'. Trên a lấy ba điểm phân biệt A, B, C; trên a' lấy ba điểm phân biệt A', B', C' sao cho: $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$. Chứng minh rằng AA', BB', CC' nằm trong các mặt phẳng song song.

ÔN TẬP CHƯƠNG II

Bài 1. Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng. Trên hai đường chéo AC và BF ta lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho $\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BF} = \frac{1}{3}$. Từ M và N vẽ những đường thẳng song song với AB, lần lượt cắt AD và AF tại M' và N'.

a) Chứng minh MN // DE. b) Chứng minh M'N' // (DEF).

c) Chứng minh (DEF) // (MNN'M').

Bài 2. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Tại các đỉnh của hình vuông kẻ các nửa đường thẳng Ax, By, Cz, Dt song song, cùng nằm về một phía của mp(ABCD). Gọi I là điểm đối xứng của D qua A. Trên Ax, By lần lượt lấy A', B' sao cho AA' = $\frac{a}{2}$, BB' = a. Mp(IA'B') cắt Cz, Dt lần lượt tại C', D'.

a) Tứ giác A'B'C'D' là hình gì ?

b) B'C' và A'B' cắt mp(ABCD) lần lượt tại J và K. Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

c) Tính theo a các cạnh và diện tích tứ giác IABJ.

Bài 3. Cho hình chóp S. ABCD có đáy là hình thang ABCD (AD // BC). Gọi M, N và G lần lượt là trung điểm của AB, CD và trọng tâm tam giác SAD.

a) Xác định giao tuyến của mp(SAB) và (SCD).

b) Xác định thiết diện của hình chóp S. ABCD với mp(MNG).

c) Gọi O là giao của AC và BD. Giả sử đường thẳng SO cắt mp(MNG) tại E. Hãy xác định điểm E.

Bài 4. Cho hình chóp tứ giác đều S. ABCD có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng b. Gọi M, N là trung điểm của AB và BC. Tính diện tích thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (P) đi qua M và N, song song với SB.

Bài 5. Cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng chéo nhau a, b cắt (P) tại A, B. Gọi m là đường thẳng thay đổi luôn luôn song song với (P), tựa lên a, b và cắt a tại M, cắt b tại N. Qua M vẽ đường thẳng c song song với b, cắt (P) tại C.

a) Tứ giác MNBC là hình gì ?

b) Chứng minh C luôn chạy trên một đường thẳng cố định.

c) Xác định vị trí đường thẳng m để độ dài MN ngắn nhất.

Bài 6. Cho tứ diện ABCD. Gọi (P) là mặt phẳng luôn đi qua các trung điểm I, K của cạnh DA và DB. Các cạnh CA, CB lần lượt cắt (P) tại M, N.

a) Tứ giác MNIK là hình gì ? Khi nào tứ giác đó là hình bình hành.

b) Gọi O là giao của MI và NK. Chứng minh: O luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

c) Gọi d là giao tuyến của (P) và (OAB). Chứng minh khi (P) thay đổi thì d luôn nằm trong một mặt phẳng cố định.

Bài 7. Cho tứ diện ABCD. Một mặt phẳng (α) song song với AC và BD cắt tứ diện theo thiết diện PQRS.

a) Chứng minh PQRS là hình bình hành.

b) Xác định (α) để PQRS là hình thoi.

Bài 8. Cho lăng trụ tam giác ABC. A'B'C'. Gọi I, J, K lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC. A'B'C'. ABB'. Chứng minh: (IKG) // (BB'C'C); (A'KG) // (AIC').

Bài 9. Cho hình lăng trụ ABC. A'B'C', đáy ABC là tam giác đều cạnh a. M là một điểm trên đường chéo AB' của mặt bên AA'B'B sao cho $\frac{AM}{MB'} = \frac{5}{4}$ Gọi (P) là mặt phẳng qua M, song song với A'C và BC'. Xác định thiết diện của lăng trụ với (P) và tìm tỷ số mà (P) chia cạnh CC'.

Chương III: VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN.

§1: VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN. SỰ ĐỒNG PHẲNG CỦA CÁC VECTƠ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN:

1. *Vectơ trong không gian:* Vectơ, các phép toán vectơ được định nghĩa hoàn toàn giống như trong mặt phẳng.
2. *Sự đồng phẳng của các vectơ:*

a) *Định nghĩa:* Ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

b) *Điều kiện đồng phẳng của 3 vectơ:*

* Định lí 1: Cho 3 vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$, trong đó $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương khi đó ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi có duy nhất các số m, n sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

* Định lí 2: Nếu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ là 3 vectơ không đồng phẳng thì với mọi vectơ $\vec{d}$ bất kì ta đều tìm được duy nhất các số m, n, p sao cho: $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$.

B. CÁC DẠNG TOÁN:

Dạng 1: *Chứng minh các đẳng thức.*

* *Phương pháp:* *Để chứng minh các đẳng thức vectơ ta chú ý:*

1) Sử dụng:

- *Các phép toán về vectơ.*
- *Các tính chất, các qui tắc về các phép toán vectơ:*

· *Qui tắc 3 điểm:* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ *với mọi A, B, C*

· *Qui tắc hình bình hành:* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ *với ABCD là hình bình hành*

· *Qui tắc trung điểm:* $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ *với I là trung điểm của AB.*

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ *với mọi điểm M.*

· *Qui tắc trọng tâm:* $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ *với G là trọng tâm ΔABC.*

2) Thực hiện các phép biến đổi theo một trong các hướng:

- *Biến đổi vế này thành vế kia của đẳng thức.*
- *Biến đổi đẳng thức cần chứng minh về tương đương với một đẳng thức hằng đúng.*
- *Xuất phát từ một đẳng thức luôn đúng để biến đổi về đẳng thức cần chứng minh.*

Chú ý: * *Đối với việc chứng minh các đẳng thức về độ dài cần lưu ý vận dụng* $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2$ *và khai thác các tính chất của vectơ để suy ra.*
* *Ngoài ra để chứng minh một số đẳng thức A = B, ta có thể chứng minh:*

$$\begin{cases} A = C \\ B = C \end{cases} \Rightarrow A = B$$

Bài 1: *Trong không gian cho các điểm A; B; C; D; E và F. Chứng minh rằng:*

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}.$ *2)* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB}.$

Giải:

1) Cách 1: Ta có: $VT = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC})$

$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = VP.$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Cách 2: Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}.$ (1)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB}$ (2)

Vì (2) luôn đúng nên (1) được chứng minh.

Cách 3: Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}.$

Suy ra: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$ (đpcm)

2) Ta có: $VT = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \left(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FB}\right) + \left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}\right) + \left(\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF}\right)$

$= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} + \left(\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DF}\right) = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} = VP.$

Tương tự như trên ta cũng có thể giải bằng các cách khác.

Bài 2: *Cho hình hộp ABCD A'B'C'D'.*

1) Chứng minh rằng a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}.$

b) $\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{D'D} = \overrightarrow{A'C}.$

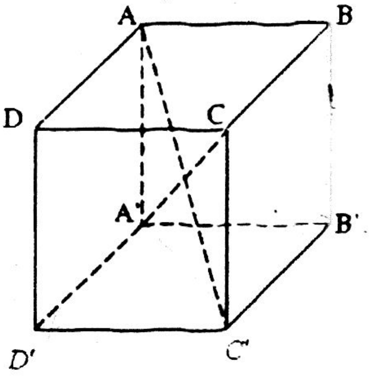
2) Gọi O là tâm của hình hộp, chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'} = \vec{O}.$

b) $\overrightarrow{PO} = \frac{1}{8}\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PA'} + \overrightarrow{PB'} + \overrightarrow{PC'} + \overrightarrow{PD'}\right).$

Với mọi P.

Giải:



1. a) Ta có:

$VT = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) + \overrightarrow{AA'}$

$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'}$ (vì $ABCD$ là hình bình hành)

$= \overrightarrow{AC'}$ (vì $ACC'A'$ là hình bình hành)

Nhận xét: Như vậy, nếu $ABCD\,A'B'C'D'$ là hình hộp thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$. Qui tắc này được gọi là qui tắc hình hộp.

b) Ta có

$VT=\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{D'D}\quad=\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{A'A}$

$=\overrightarrow{A'C}$ (theo qui tắc hình hộp ở trên).

2. a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{OD'}$

$=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC'})+(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD'})+(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA'})+(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB'})=\vec{0}$

b) Ta có: $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PA'}+\overrightarrow{PB'}+\overrightarrow{PC'}+\overrightarrow{PD'}$

$=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OC})+(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OD})+$

$(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA'})+(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OB'})+(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OC'})+(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OD'})$

$=8\overrightarrow{PO}+(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{OD'})=8\overrightarrow{PO}$.

Suy ra: $\overrightarrow{PO}=\frac{1}{8}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PA'}+\overrightarrow{PB'}+\overrightarrow{PC'}+\overrightarrow{PD'})$.

Bài 3: *Cho tứ diện ABCD.*

1) Gọi I là trọng tâm ΔBCD. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AI}$.

2. a) Chứng minh rằng G là trọng tâm của tứ diện khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{O}$.

b) Nếu G là trọng tâm của tứ diện thì với mọi P ta có: $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=4\overrightarrow{PG}$.

Giải:

1) Ta có I là trọng tâm ΔBCD nên: $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$.

Khi đó: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{ID}$

$=3\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\quad=\quad3\overrightarrow{AI}$ (đpcm).

2. a) Gọi M, N là trung điểm của AB và CD. B C D G N

Ta có: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GM}$

$\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GN}$

G là trọng tâm tứ diện $\Leftrightarrow\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}=\vec{0}$

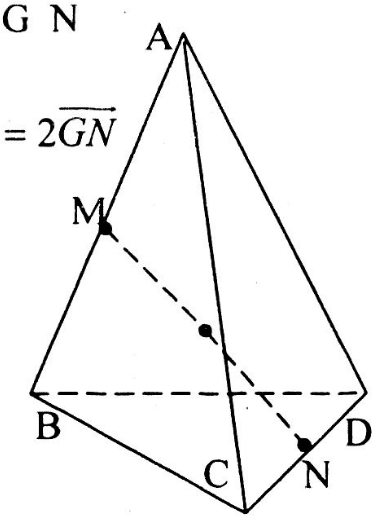
$\Leftrightarrow2\overrightarrow{GM}+2\overrightarrow{GN}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

b) Ta có:

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}$

$=\overrightarrow{PG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{PG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{PG}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{PG}+\overrightarrow{GD}$

$=4\overrightarrow{PG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\quad=\quad4\overrightarrow{PG}$ (đpcm).

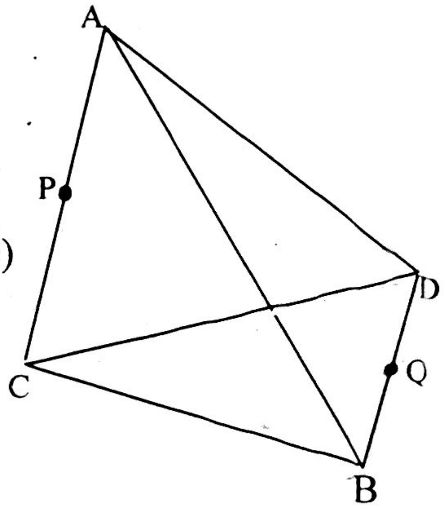


Bài 4: *Cho tứ diện ABCD. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AC và BD. Chứng minh rằng:*

1) $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right).$

2) $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4PQ^2.$

Giải:



1) Ta có $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DQ}$

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BQ}$

Suy ra:

$$2\overrightarrow{PQ}=\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}\right)+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\left(\overrightarrow{DQ}+\overrightarrow{BQ}\right)$$

$$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}.\ (\text{vì } \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{DQ}+\overrightarrow{BQ}=\vec{0})$$

Suy ra: $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}\right).$

Tương tự như trên, ta có: $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right).$

Từ đó suy ra đẳng thức phải chứng minh.

2) Ta có:

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CD}^2+\overrightarrow{DA}^2$$

$$=\overrightarrow{AB}^2+\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)^2+\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)^2+\overrightarrow{AD}^2$$

$$=2(AB^2+AC^2+AD^2)-2\overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}).\quad (1)$$

Mặt khác ta có: $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC},\quad \overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right).$

Suy ra: $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right).$

Khi đó: $AC^2+BD^2+4PQ^2=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BD}^2+4\overrightarrow{PQ}^2$

$$=\overrightarrow{AC}^2+(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})^2+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})^2$$

$$=AC^2+AD^2+AB^2-2\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}+AB^2+AD^2+AC^2+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$$

$$-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$$

$$=2(AB^2+AC^2+AD^2)-2\overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}).\quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta suy ra: $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4PQ^2.$

Nhận xét: Để chứng minh đẳng thức trên ta cần chú ý:

- Qui biểu thức độ dài về biểu thức vectơ.
- Biểu diễn các vectơ trong biểu thức theo hệ các vectơ chọn trước để tiện trong quá trình tính toán và so sánh.

Bài 5: *Cho tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD, I là trung điểm của đoạn AG. Chứng minh rằng:*

1) $3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$.

2) $3MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=6MI^2+3IB^2+IC^2+ID^2$.

Giải:

1) Vì D là trọng tâm ΔBCD nên:

$$\overrightarrow{IG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ 3\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\Leftrightarrow -3\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}$$

Suy ra: $3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{0}$.

2) Ta có:

$$3MA^2=3\overrightarrow{MA}^2=3\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM}\right)^2=3IA^2+3IM^2-6\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IM}$$

$$MB^2=\overrightarrow{MB}^2=\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IM}\right)^2=IB^2+IM^2-2\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IM}$$

$$MC^2=\overrightarrow{MC}^2=\left(\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IM}\right)^2=IC^2+IM^2-2\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IM}$$

$$MD^2=\overrightarrow{MD}^2=\left(\overrightarrow{ID}-\overrightarrow{IM}\right)^2=ID^2+IM^2-2\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{IM}$$

Suy ra:

$$3MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=3IA^2+IB^2+IC^2+ID^2$$
$$-2\overrightarrow{IM}\left(3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\right).$$

$$=3IA^2+IB^2+IC^2+ID^2-2\overrightarrow{IM}.\vec{0}$$
$$=3IA^2+IB^2+IC^2+ID^2$$

Dạng 2: ***Phân tích một vectơ theo ba vectơ không đồng phẳng.***

* *Phương pháp:*

- *Áp dụng kết quả của định lí 2 ta có thể phân tích bất cứ một vectơ nào theo 3 vectơ không đồng phẳng.*
- *Áp dụng các qui tắc và các tính chất về các phép toán vectơ để phân tích một vectơ theo 3 vectơ không đồng phẳng cho trước.*

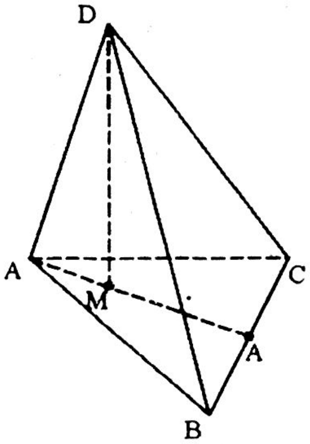
Bài 1: *Cho tứ diện ABCD, M là điểm chia trung tuyến AA_1 của tam giác ABC theo tỉ số AM: MA_1 = 3: 7. Hãy phân tích $\overrightarrow{DM}$ theo $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ và $\overrightarrow{DC}$.*

Giải:

Vì $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{7}\overrightarrow{MA_1}$ nên $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{7}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AA_1}\right)$

Suy ra: $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{10}\overrightarrow{AA_1}$.

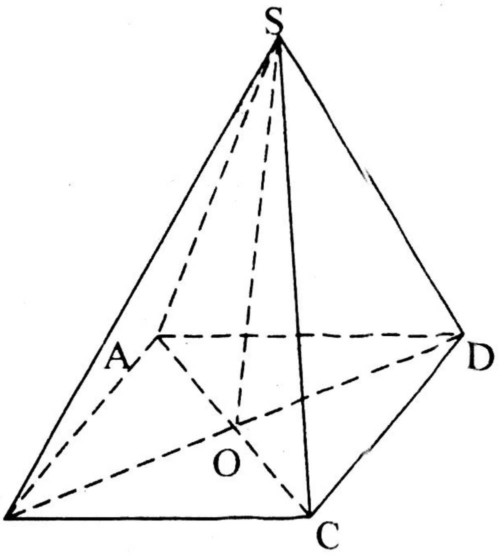
Do đó:



$$\begin{aligned}\overrightarrow{DM} &= \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{DA}+\frac{3}{10}\overrightarrow{AA_1}\\ &= \overrightarrow{DA}+\frac{3}{10}\left(\overrightarrow{DA_1}-\overrightarrow{DA}\right)\\ &= \overrightarrow{DA}+\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\right)-\frac{3}{10}\overrightarrow{DA}\\ &= \frac{7}{10}\overrightarrow{DA}+\frac{3}{20}\overrightarrow{DB}+\frac{3}{20}\overrightarrow{DC}.\end{aligned}$$

Bài 2: *Cho hình chóp SABCD, đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Hãy phân tích các vectơ* $\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SD}$ *theo các vectơ* $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ *và* $\overrightarrow{SO}$.

Giải:



Ta có: $\overrightarrow{SA}=\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{SO}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$

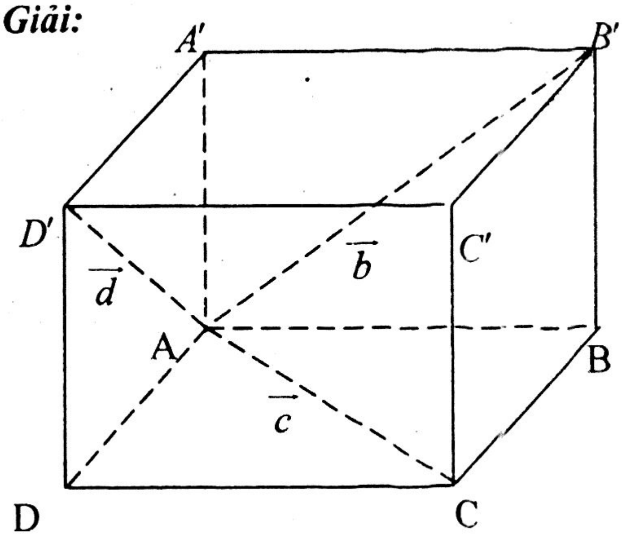
$$\begin{aligned}\overrightarrow{SB} &= \overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}\\ &= \overrightarrow{SO}+\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{SO}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SD} &= \overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{BO}\\ &= \overrightarrow{SO}+\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{SO}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Bài 3: *Cho hình hộp ABCD A'B'C'D'. Đặt* $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AB'}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD'}=\vec{d}$. *Hãy phân tích các vectơ* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA'}$ *theo* $\vec{b}$, $\vec{c}$ *và* $\vec{d}$.

Giải:



Ta có: $\overrightarrow{AB'}=\vec{b}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}$ (1)

$\overrightarrow{AC}=\vec{c}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ (2)

$\overrightarrow{AD'}=\vec{d}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$ (3)

Suy ra:

+ $2\overrightarrow{AB}=\vec{b}+\vec{c}-\vec{d}$

(Lấy (1) + (2) – (3))

Vậy: $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{c}-\vec{d}\right).$

+ $2\overrightarrow{AD}=\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}$

(Lấy (2) + (3) – (1))

Vậy: $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}\right).$

$+ \ 2\overrightarrow{AA'} = \vec{b} + \vec{d} - \vec{c}$

(Lấy (1) + (3) − (2))

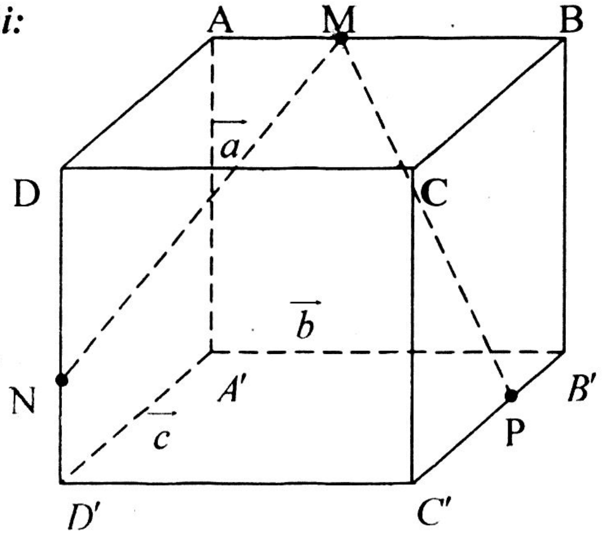
Vậy: $\overrightarrow{AA'} = \dfrac{1}{2}\left(\vec{b} + \vec{d} - \vec{c}\right)$.

Bài 4: *Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Trên cạnh AB, DD', $C'B'$ lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho.*

$$\frac{AM}{AB} = \frac{D'N}{D'D} = \frac{B'P}{B'C'} = k \quad (0 < k \le 1).$$

Đặt $\overrightarrow{A'A} = \vec{a}$, $\overrightarrow{A'B'} = \vec{b}$, $\overrightarrow{A'D'} = \vec{c}$. Phân tích các vectơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$ theo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ từ đó suy ra việc biểu diễn các vectơ đó theo các vectơ $\overrightarrow{AB'}$ và $\overrightarrow{AD'}$.

Giải:



* Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}\\ &= -k\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + (1-k)\overrightarrow{DD'}\\ &= -k\vec{b} + \vec{c} + (1-k)(-\vec{a})\\ &= (k-1)\vec{a} - k\vec{b} + \vec{c}.\end{aligned}$$

Mặt khác, $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{A'A} = \vec{b} - \vec{a}$.

$\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{A'D'} - \overrightarrow{A'A} = \vec{c} - \vec{a}$.

Khi đó:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= k\vec{a} - \vec{a} - k\vec{b} + \vec{c}\\ &= -k(\vec{b} - \vec{a}) + \vec{c} - \vec{a} = -k\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'}\end{aligned}$$

* Ta có: $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'P} = (1-k)\vec{b} - \vec{a} + k\vec{c}$

Suy ra: $\overrightarrow{MP} = -\vec{a} + \vec{b} + k(\vec{c} - \vec{b}) = \overrightarrow{AB'} + k\overrightarrow{AD'}$.

Dạng 3: Chứng minh ba vectơ đồng phẳng.

* *Phương pháp:*

– *Để chứng minh các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng ta có thể:*

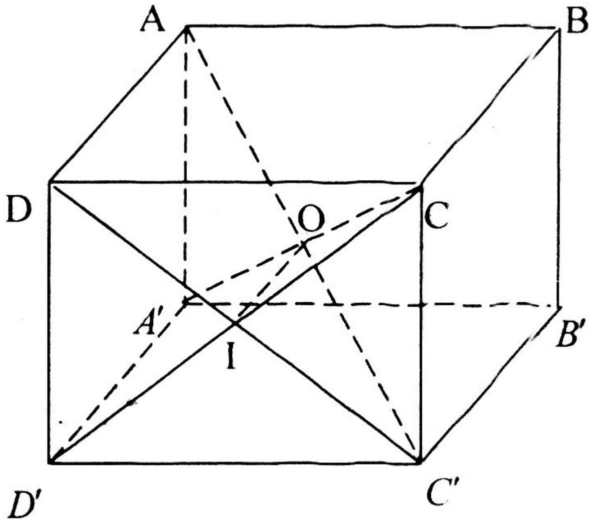
+ *Áp dụng định nghĩa.*

+ *Áp dụng điều kiện đồng phẳng của ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ là tồn tại các số m, n sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.*

– *Lưu ý: Để chứng minh các điểm A, B, C, D đồng phẳng ta cần chứng minh các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ đồng phẳng.*

Bài 1: *Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm là O, I là tâm của hình bình hành $CDD'C'$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OI}$ và $\overrightarrow{B'D'}$ đồng phẳng.*

Giải:



Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{A'B'} = \vec{b}$, $\overrightarrow{A'D'} = \vec{c}$.

Ta có:

$$\overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{A'D'} - \overrightarrow{A'B'} = \vec{c} - \vec{b}$$

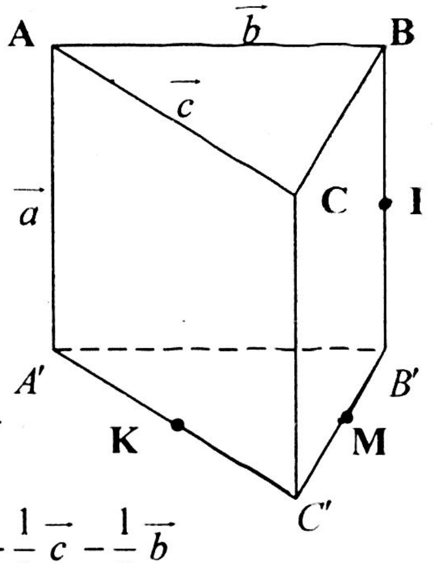
$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'D'} = \frac{1}{2}\vec{c}.$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{A'D'} = \vec{b} + \vec{c}\\ &= -\left(\vec{c} - \vec{b}\right) + 2\vec{c}\\ &= -\left(\vec{c} - \vec{b}\right) + 4\cdot\frac{1}{2}\vec{c}\\ &= -\overrightarrow{B'D'} + 4\overrightarrow{OI}.\end{aligned}$$

Vậy $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OI}$ *và* $\overrightarrow{B'D'}$ *đồng phẳng.*

Bài 2: *Cho lăng trụ tam giác $ABC\,A'B'C'$. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BB' và $A'C'$. Gọi M là điểm chia đoạn $B'C'$ theo tỉ số $-\frac{1}{2}$. Chứng minh rằng A, K, I, M nằm trên cùng một mặt phẳng.*

Giải:



Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$.

Ta có: $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$.

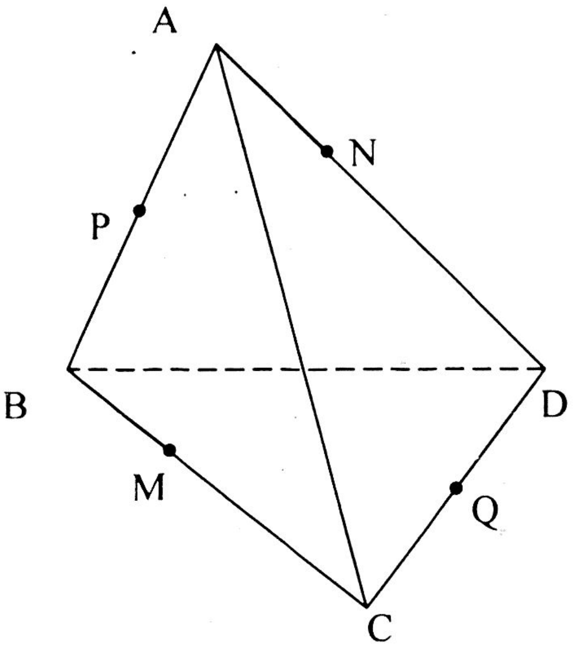
$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'K} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}.$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'M}\\ &= \vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{3}\overrightarrow{B'C'} = \vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\\ &= \vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{b}\\ &= \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)\\ &= \frac{2}{3}\left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}\right)\\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AK} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}\end{aligned}$$

Vậy $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{AI}$ đồng phẳng. Do đó A, M, K, I thuộc cùng một mặt phẳng.

Bài 3: *Cho tứ diện ABCD. P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD. Hai điểm M, N lần lượt chia hai đoạn thẳng BC và AD theo cùng tỉ số k. Chứng minh rằng P, Q, M, N nằm trên cùng một mặt phẳng.*

Giải:



Từ giả thiết ta suy ra:

$$\frac{MB}{MC}=\frac{NA}{ND}=|k|$$

$$\Rightarrow \frac{BM}{BC}=\frac{AN}{AD}=\frac{|k|}{|k|+1}$$

Vậy $\overrightarrow{AD}=\frac{|k|+1}{|k|}\overrightarrow{AN};\ \overrightarrow{BC}=\frac{|k|+1}{|k|}\overrightarrow{BM}$

Ta lại có:

$$\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{|k|+1}{|k|}\overrightarrow{AN}+\frac{|k|+1}{|k|}\overrightarrow{BM}\right]$$

$$=\frac{|k|+1}{2|k|}(\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BM})=\frac{|k|+1}{2|k|}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PM})=\frac{|k|+1}{2|k|}(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}).$$

Suy ra $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}$ đồng phẳng hay *M, N, P, Q* thuộc cùng một mặt phẳng.

Dạng 4:* *Áp dụng phương pháp vectơ để giải một số dạng bài toán.

* *Phương pháp:*

1. Để giải bài toán hình học bằng phương pháp vectơ ta tiến hành:

Bước 1: – *Lựa chọn vectơ "gốc".*
– *Chuyển giả thiết kết luận bài toán về ngôn ngữ vectơ.*

Bước 2: – *Biểu diễn các vectơ liên quan theo hệ vectơ "gốc".*
– *Thực hiện các phép biến đổi các biểu thức vectơ theo từng yêu cầu bài toán.*

Bước 3: *Chuyển kết luận từ ngôn ngữ vectơ sang ngôn ngữ hình học thông thường.*

2. Một số dạng bài toán sử dụng thuận lợi phương pháp vectơ.

– Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng ta cần chứng minh $\overrightarrow{AB}\,//\,\overrightarrow{AC}$*(hoặc* $\overrightarrow{AB}\,//\,\overrightarrow{BC}$ *hoặc* $\overrightarrow{AC}\,//\,\overrightarrow{BC}$*) tức là chứng minh* $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ *với* $k\in R$.

Ngoài ra, để chứng minh A, B, C thẳng hàng ta có thể chứng minh đẳng thức vectơ sau:

$$\overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MC} + (1-k)\overrightarrow{MA} \text{ với M bất kì, } k \in R.$$

Đặc biệt nếu $0 \le k \le 1$ thì B nằm trên đoạn AC.

– Chứng minh ba đường thẳng a, b, c đồng qui ta đưa về bài toán trên bằng cách:

+ Gọi $\{A\} = a \cap b$.

+ Chứng minh $A \in c$ tức là chứng minh A, B, C thẳng hàng với B, C là hai điểm trên c.

– Chứng minh AB // CD ta chứng minh $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$, A, B, C, D không thẳng hàng.

– Chứng minh AB // (P) ta chứng minh $\overrightarrow{AB}, \vec{a}, \vec{b}$ đồng phẳng với $\vec{a}, \vec{b}$ là hai vectơ khác không không cùng phương trên (P). Tức là chứng minh:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ma} + \overrightarrow{nb}.$$

– Chứng minh (Q) // (P) ta qui về chứng minh hai đường thẳng cắt nhau trong (Q) song song với mặt phẳng (P).

– Các bài toán liên quan đến tính độ dài, góc cần chú ý:

$$+ \quad AB = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$$

$$+ \quad \cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|} \text{ (}\alpha\text{ là góc giữa 2 vectơ } \vec{a}, \vec{b}\text{).}$$

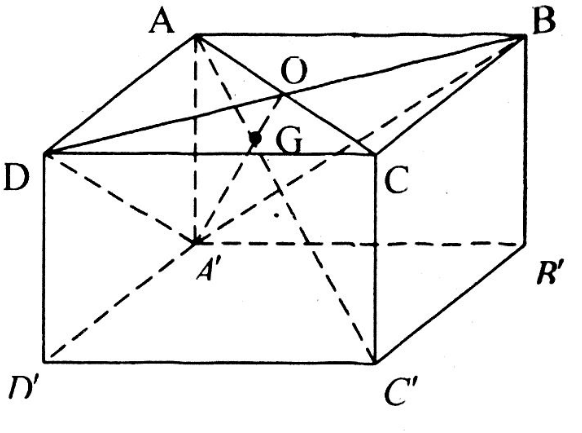
Bài 1: *Cho hình hộp chữ nhật ABCD A'B'C'D'. Gọi G là trọng tâm tam giác A'BD. Chứng minh rằng A, G, C' thẳng hàng.*

Giải:

Chọn hệ vectơ gốc:

$$\overrightarrow{AA'} = \vec{a};\ \overrightarrow{AB} = \vec{b};\ \overrightarrow{AD} = \vec{c}.$$

Ta có:



$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'G} = \overrightarrow{AA'} + \frac{2}{3}\overrightarrow{A'O}$$

$$= \vec{a} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{A'D} + \overrightarrow{A'B}\right)$$

$$= \vec{a} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B} - \overrightarrow{AA'}\right)$$

$$= \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$$

Suy ra $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC'}$. Vậy A, G, C' thẳng hàng.

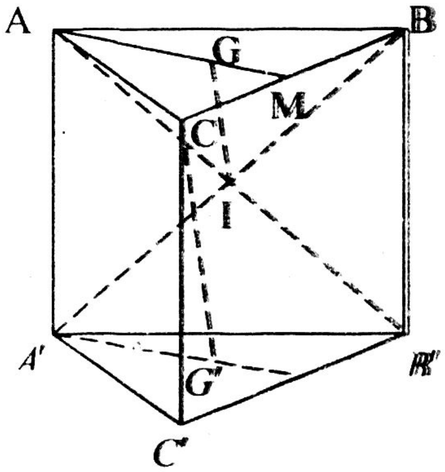
Nhận xét:

- Ta có thể chọn một hệ gồm ba vectơ khác không không đồng phẳng khác làm hệ vectơ "gốc" và biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{AG}$ theo hệ vectơ đó và so sánh để rút ra kết luận.

- Ngoài phương pháp vectơ, bài toán này có thể giải bằng phương pháp hình học thông thường là ta chứng minh A, G, C' cùng thuộc hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và $(ADC'B)$. Khi đó chúng cùng nằm trên đường giao tuyến của hai mặt phẳng.

Bài 2: *Cho lăng trụ ABCA'B'C'. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và A'B'C'. Gọi I là giao điểm của AB' và A'B. Chứng minh rằng GI // CG'.*

Giải:



Chọn $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$

Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GI}&=\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AG}\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB'}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}\\&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}\right)-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)-\frac{1}{3}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\\&=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{c}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CG'}&=\overrightarrow{AG'}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'G'}-\overrightarrow{AC}\\&=\vec{a}+\frac{1}{3}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)-\vec{c}\\&=\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{c}=2\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{c}\right)=2\overrightarrow{GI}.\end{aligned}$$

Vậy $GI \parallel CG'$.

Bài 3: *Cho hình hộp chữ nhật ABCD. A'B'C'D'. Điểm M chia đoạn AD theo tỉ số $-\frac{1}{4}$, điểm N chia đoạn A'C theo tỉ số $-\frac{2}{3}$. Chứng minh rằng MN // mp (BC'D).*

Giải:

Chọn $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BB'}=\vec{b}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{c}$

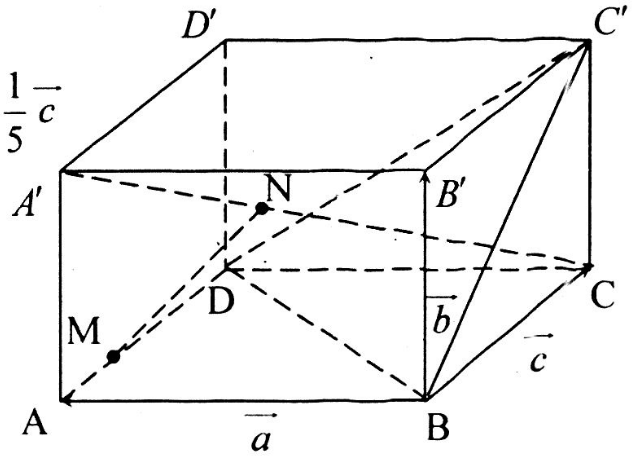
Vì M chia AD theo tỉ số $-\frac{1}{4}$ nên $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$

N chia $B'C$ theo tỉ số $-\frac{2}{3}$ nên $\overrightarrow{A'N}=\frac{2}{5}\overrightarrow{A'C}$

Ta có:

$$\overrightarrow{BD}=\vec{a}+\vec{c};\ \overrightarrow{BC'}=\vec{b}+\vec{c}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN}&=\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BM}\\&=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'N}-\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AM}\\&=\vec{a}+\vec{b}+\frac{2}{5}\left(\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}\right)-\vec{a}-\frac{1}{5}\vec{c}\\&=-\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}+\frac{1}{5}\vec{c}\\&=-\frac{2}{5}\left(\vec{a}+\vec{c}\right)+\frac{3}{5}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\\&=-\frac{2}{5}\overrightarrow{BD}+\frac{3}{5}\overrightarrow{BC'}\end{aligned}$$



Suy ra MN // $(BC'D)$.

Bài 4: *Cho hình lập phương $ABCDA'B'C'D'$. Trên cạnh AB, DD', $C'B'$ lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $AM = D'N = B'P$.*

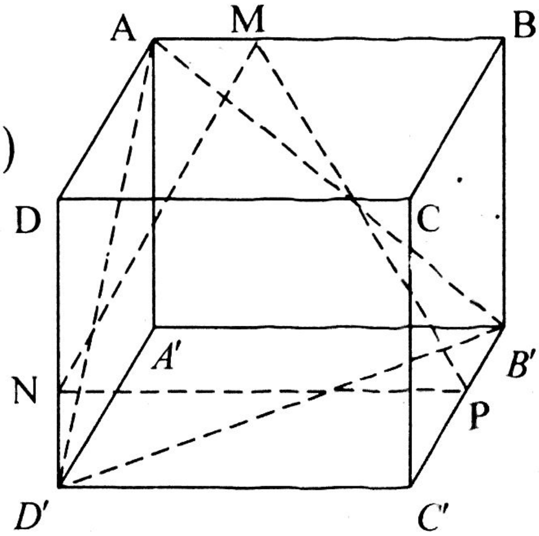
Chứng minh rằng mp (MNP) // mp $(AB'D')$.

Giải:

Chọn $\overrightarrow{A'A}=\vec{a}$, $\overrightarrow{A'B'}=\vec{b}$, $\overrightarrow{A'D'}=\vec{c}$.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử:

$$\frac{AM}{AB}=\frac{D'N}{D'D}=\frac{B'P}{B'C'}=k\quad\left(0<k\le 1\right)$$



Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB'}&=\overrightarrow{A'B'}-\overrightarrow{A'A}=\vec{b}-\vec{a}.\\\overrightarrow{AD'}&=\overrightarrow{A'D'}-\overrightarrow{AA'}=\vec{c}-\vec{a}.\\\overrightarrow{MN}&=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}\\&=-k\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+(1-k)\overrightarrow{DD'}\\&=-k\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}+k\vec{a}\\&=-k(\vec{b}-\vec{a})+(\vec{c}-\vec{a})\\&=k\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AD'}.\end{aligned}$$

Suy ra: MN // mp $(AB'D')$.

Mặt khác,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MP}&=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'P}\\&=(1-k)\vec{b}-\vec{a}+k\vec{c}\end{aligned}$$

$$= (1-k)(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) + k(\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a})$$
$$= (1-k)\overrightarrow{AB'} + k\overrightarrow{AD'}.$$

Suy ra MP // mp $(AB'D')$

Từ đó mp (MNP) // mp $(AB'D')$.

C. BÀI TẬP:

Bài 1: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB và CD. I là trung điểm của PQ. Chứng minh rằng:

1) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{0}$.

2) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{0}$. (*)

3) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MI}$ với mọi M.

4) I là điểm duy nhất thỏa mãn hệ thức (*).

Bài 2: Cho hình hộp xiên $ABCDA'B'C'D'$. Gọi G là trọng tâm tam giác $AB'C$.

1) Chứng minh rằng $\overrightarrow{BD'} = 3\overrightarrow{BG}$.

2) Gọi P, Q, R lần lượt là điểm đối xứng D qua A, B', C. Chứng minh rằng B là trọng tâm của tứ diện $PQRD'$.

Bài 3: Cho tứ diện $ABCD$. I là điểm tuỳ ý thoả mãn hệ thức $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$. Chứng minh rằng:

$$2DA^2 + DB^2 - DC^2 = 2DI^2 + 2IA^2 + IB^2 - IC^2.$$

Bài 4: Cho tứ diện $ABCD$. M và N là trung điểm của DB và DC. Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}, \overrightarrow{MN}$ theo $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}$.

Bài 5: Cho tứ diện $ABCD$. M và N là các điểm chia DB và AC theo tỉ số: $\dfrac{\overline{MD}}{\overline{MB}} = m$; $\dfrac{\overline{NA}}{\overline{NC}} = n$. Hãy phân tích vectơ $\overrightarrow{MN}$ theo các vectơ $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$.

Bài 6: Cho hình lập phương $ABCDA'B'C'D'$ cạnh a. Trên AD' và $C'D'$ lấy các điểm P, Q sao cho: $\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AD'}$; $\overrightarrow{C'Q} = -\overrightarrow{C'D}$.

1) Chứng minh rằng đường thẳng PQ đi qua trung điểm M của B' và M là trung điểm của PQ.

2) Tính PQ.

Bài 7: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi B_1, C_1, D_1 lần lượt là trọng tâm của tam giác ACD, ABD và ABC. G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm tam giác $B_1C_1D_1$ và BCD. Chứng minh rằng A, G_1, G_2 thẳng hàng.

Bài 8: Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA'B'C'D'$. P là điểm trên đường thẳng CC' sao cho $\overline{CD} = \frac{3}{2}\overline{CC'}$. M là điểm trên đường thẳng AD; N là điểm trên đường thẳng BD' sao cho M, N, P thẳng hàng. Tính $\frac{MD}{MA}$.

Bài 9: Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA'B'C'D'$. Gọi E là tâm của $ABB'A'$. N, I lần lượt là trung điểm của CC' và CD. Chứng minh rằng $EN \parallel AI$.

Bài 10: Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA'B'C'D'$.

Đặt $\overrightarrow{B'A'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{B'B} = \vec{b}$, $\overrightarrow{B'C'} = \vec{c}$.

Gọi M, N là các điểm chia AC' và CD' theo tỉ số m, n tức là $\overrightarrow{MA} = m\overrightarrow{MC'}$; $\overrightarrow{NC} = n\overrightarrow{ND'}$.

1) Biểu diễn $\overrightarrow{B'M}$, $\overrightarrow{B'N}$ theo $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

2) Xác định m, n để $MN \parallel B'D$.

Bài 11: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD. Hai điểm M, N lần lượt chia hai đoạn thẳng BC và AD theo cùng tỉ số k. Chứng minh P, Q, M, N cùng nằm trên một mặt phẳng.

Bài 12: Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA' và $B'C'$. Chứng minh rằng $MN \parallel (DA'C')$.

Bài 13: Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA'B'C'D'$. Các điểm M, N lần lượt chia AD' và DB theo tỉ số k ($k \neq 0$; $k \neq 1$). Chứng minh rằng $MN \parallel (A'D'BC)$.

Bài 14: Cho lăng trụ tam giác $ABCA'B'C'$. Goi M, N lần lượt là trung điểm của AA' và CC'. G là trọng tâm tam của giác $A'B'C'$. Chứng minh rằng mp $(MGC') \parallel$ mp$(AB'N)$.

Bài 15: Cho tứ diện $ABCD$. Lấy các điểm M, N, P, Q lần lượt thuộc AB, BC, CD và DA sao cho $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DP} = k\overrightarrow{DC}$.

Hãy xác định k để P, Q, M, N đồng phẳng.

Bài 16: Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA'B'C'D'$. Trên AA', BB', CC' lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $\frac{AM}{AA'} = \frac{B'N}{BB'} = \frac{C'P}{CC'} = \frac{3}{4}$. Trên đoạn CM, $A'N$ lấy các điểm E, F sao cho $EF \parallel B'P$. Tính tỉ số $\frac{EF}{B'P}$.

Bài 17: Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA'B'C'D'$. P là điểm trên đường chéo $A'C'$ sao cho $\frac{\overline{C'P}}{\overline{C'A'}} = -\frac{1}{2}$. M thuộc AB, N thuộc $B'C$ sao cho M, N, P thẳng hàng.

Tính $\frac{MA}{MB}$; $\frac{NC}{NB'}$.

§2: HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC.

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN:

1. *Góc giữa hai đường thẳng:* Góc giữa hai đường thẳng a, b **là góc giữa** hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song **song với a, b.**

Kí hiệu: $\alpha = (\widehat{a, b})$. Chú ý: $0 \le \alpha \le 90^o$.

2. *Hai đường thẳng vuông góc:*

- Hai đường thẳng a, b được gọi là vuông góc với nhau nếu **góc giữa chúng** bằng 90^o. Kí hiệu: $a \perp b$.
- Chú ý: $a \perp b \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$ trong đó $\vec{u} // a$; $\vec{v} // b$.
- Nhận xét: Một đường thẳng vuông góc với một trong **hai đường thẳng** song song thì vuông góc với đường thẳng kia.

B. CÁC DẠNG TOÁN:

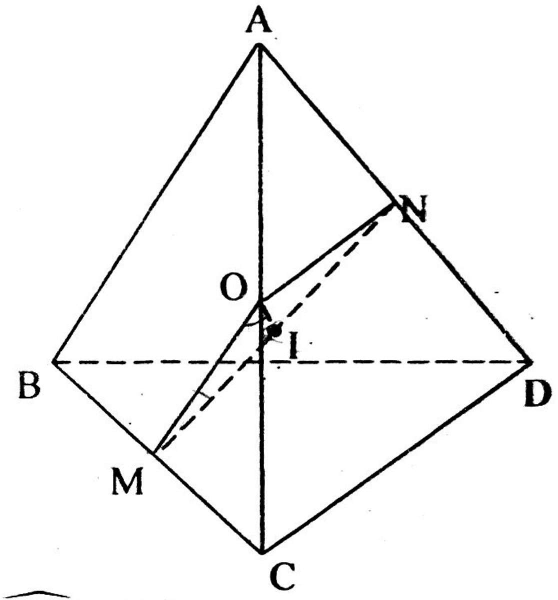
***Dạng 1:* Tính góc giữa hai đường thẳng.**

* *Phương pháp: Để xác định góc giữa hai đường thẳng a, b **kí hiệu** $(\widehat{a,b})$, ta thực hiện:*

- *Lấy một điểm O bất kì, xác định a' qua O và a' // a; **b' qua O và b' // b.***
- *Khi đó* $(\widehat{a,b}) = (\widehat{a', b'})$.
- *Chú ý: Điểm O có thể lấy ngay trên một trong hai đường thẳng.*

Bài 1: *Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các **cạnh** BC và AD. Biết* $AB = CD = 2a$; $MN = a\sqrt{3}$.

Tính góc $(\widehat{AB, CD})$.



Giải:

Gọi O là trung điểm của AC.

Kẻ $OM // AB$; $ON // CD$.

Khi đó:

$$(\widehat{AB, CD}) = (\widehat{OM, ON}) = \widehat{MON}$$

Ta có $OM = ON = a$.

Gọi I là trung điểm của MN.

$$MI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Suy ra: $OI = \sqrt{OM^2 - MI^2} = \frac{a}{2}$. Do đó $\widehat{OMI} = 30^o$.

Vậy $\widehat{MOI} = 60^o$.

Vì ΔOMN cân nên ta có $\widehat{MON} = 2\widehat{MOI} = 120^\circ$.

Do đó: $(\widehat{AB, CD}) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

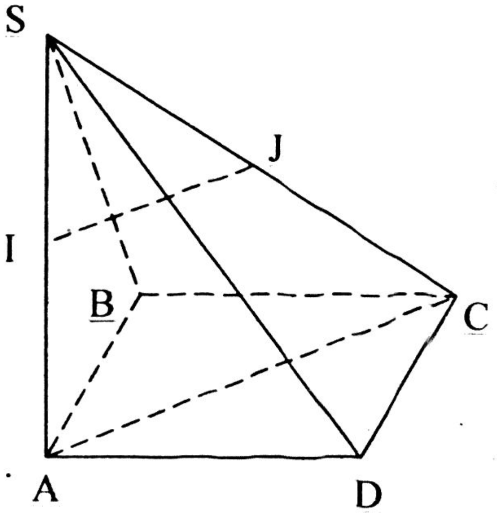
Bài 2: *Cho hình thoi ABCD cạnh bằng a và một điểm S nằm ngoài mặt phẳng chứa hình thoi sao cho SA = a và SA ⊥ BC.*

1) Xác định góc giữa SA và AD.

2) Xác định góc giữa SD và BC.

3) Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SA và SC. Xác định góc giữa IJ và BD.

Giải:



1) Ta có $\begin{cases} BC \,//\, AD \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow SA \perp AD$

Vậy: $(\widehat{SA, AD}) = 90^\circ$.

2) Ta có: $AD \,//\, BC$ nên

$$(\widehat{SD, BC}) = (\widehat{SD, AD}) = \widehat{SDA} = 45^\circ$$

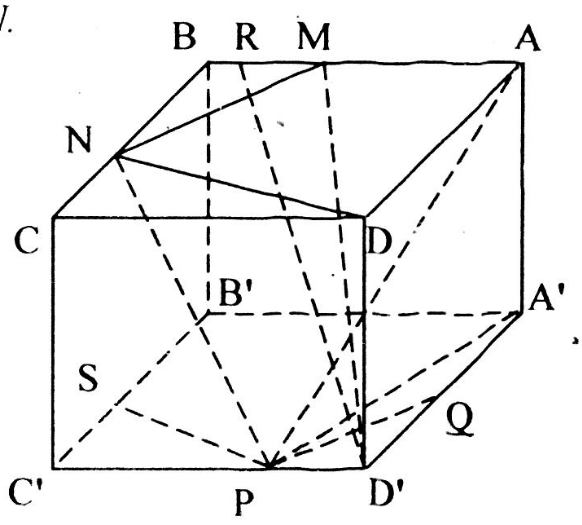
(Vì tam giác SAD vuông cân tại A).

3) Ta có $IJ \,//\, AC$ nên:

$$(\widehat{IJ, BD}) = (\widehat{AC, BD}) = 90^\circ \text{ vì } AC \perp BD.$$

Bài 3: *Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D' cạnh bằng a. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm thuộc các cạnh AB, BC và C'B' sao cho* $BM = \frac{1}{3}BA$; $CN = \frac{2}{5}CB$; $C'P = \frac{3}{4}C'D'$. *Xác định cosin của góc giữa các cặp đường thẳng MN và AP; PN và MD'; A'P và DN.*

Giải:



* Góc giữa MN và AP.

Dựng $PQ \,//\, MN$ $(Q \in A'D')$.

Khi đó, $\left(\widehat{MN, AP}\right) = \widehat{APQ}$

Ta có: $MN = \sqrt{MB^2 + NB^2} = \dfrac{a\sqrt{106}}{15}$

Mặt khác $\Delta BNM \backsim \Delta D'QP$

Vậy nên: $\dfrac{MN}{PQ} = \dfrac{BN}{D'Q} = \dfrac{BM}{D'P} = \dfrac{4}{3}$.

Suy ra: $PQ = \dfrac{3}{4}MN = \dfrac{a\sqrt{106}}{15}$

$$D'Q = \frac{3}{4}BN = \frac{9a}{20}.$$

$$A'Q = \frac{11a}{20};\ AQ = \sqrt{AA'^2 + A'Q^2} = \frac{a\sqrt{521}}{20}$$

$$DP = \frac{a\sqrt{17}}{4};\ AP = \sqrt{AD^2 + DP^2} = \frac{a\sqrt{33}}{4}$$

Vậy: $\cos\widehat{APQ} = \dfrac{AP^2 + PQ^2 - AQ^2}{2AP.PQ} = \dfrac{41}{\sqrt{3498}}$

* Góc giữa PN và MD'.

Dựng $PR \,//\, D'M$ ($R \in AB$).

Ta có: $\left(\widehat{PN, MD'}\right) = \widehat{NPR}$.

$$PR = MD' = \sqrt{MA^2 + A'D^2} = \frac{a\sqrt{22}}{3}$$

$$CP = \sqrt{CC'^2 + C'P^2} = \frac{5a}{4}$$

$$NP = \sqrt{NC^2 + CP^2} = \frac{a\sqrt{689}}{20}$$

$$RN = \sqrt{BN^2 + BR^2} = \frac{a\sqrt{1321}}{60} \left(BR = BM - PD' = \frac{a}{12}\right)$$

Vậy: $\cos\widehat{NPR} = \dfrac{PR^2 + PN^2 - RN^2}{2PR.PN} = \dfrac{114}{\sqrt{15158}}$

* Góc giữa $A'P$ và DN.

Dựng $PS \,//\, DN$ ($S \in C'B'$). Khi đó $\left(\widehat{ND, A'P}\right) = \widehat{A'PS}$.

Ta có: $\dfrac{PS}{ND} = \dfrac{C'P}{C'D'} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow PS = \dfrac{3}{4}ND.$

$$ND = \sqrt{CD^2 + CN^2} = \frac{a\sqrt{29}}{5} \Rightarrow PS = \frac{3a\sqrt{29}}{20}$$

$$PA' = \sqrt{A'D'^2 + D'P^2} = \frac{a\sqrt{17}}{4}$$

$$\frac{C'S}{CN} = \frac{C'P}{C'D'} = \frac{3}{4} \Rightarrow C'S = \frac{3}{4}CN = \frac{3a}{10}$$

$$B'S = a - \frac{3a}{10} = \frac{7a}{10} \Rightarrow A'S = \sqrt{B'A'^2 + B'S^2} = \frac{a\sqrt{149}}{10}$$

Vậy: $\cos\widehat{A'PS} = \dfrac{PA'^2 + PS^2 - A'S^2}{2PA'.PS} = \dfrac{3}{\sqrt{493}}$.

Nhận xét: Ngoài phương pháp xác định góc giữa hai đường thẳng theo cách trên (áp dụng định nghĩa), ta có thể xác định góc giữa 2 đường thẳng bằng cách quy về góc giữa hai vectơ.

$$\cos\left(\widehat{AB, CD}\right) = \left|\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{CD}\right|}.$$

Chẳng hạn:

Bài 3: (**Giải cách khác**).

Chọn $\overrightarrow{B'A'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{B'B} = \vec{b}$, $\overrightarrow{B'C'} = \vec{c}$

Khi đó: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = \frac{3}{5}\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{a}$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{D'P} = -\vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{4}\vec{a}$$

Vậy $\cos\left(\widehat{MN, AP}\right) = \left|\cos\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AP}\right)\right| = \dfrac{\frac{41}{60}}{\sqrt{\frac{9}{25}+\frac{1}{9}}\sqrt{1+1+\frac{1}{16}}} = \dfrac{41}{\sqrt{3498}}.$

Ta có: $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{B'N} - \overrightarrow{B'P} = -\frac{3}{4}\vec{a} + \vec{b} - \frac{2}{5}\vec{c}$

$$\overrightarrow{MD'} = \overrightarrow{B'D'} - \overrightarrow{B'M} = \frac{2}{4}\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$$

Vậy $\cos\left(\widehat{PN, MD'}\right) = \left|\cos\left(\overrightarrow{PN}, \overrightarrow{MD'}\right)\right| = \dfrac{114}{\sqrt{15158}}.$

Ta có $\overrightarrow{ND} = \overrightarrow{B'D} - \overrightarrow{B'N} = \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c}$

$$\overrightarrow{A'P} = \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{D'P} = \vec{c} - \frac{1}{4}\vec{a}$$

Vậy: $\cos\left(\widehat{ND, A'P}\right) = \left|\cos\left(\overrightarrow{ND}, \overrightarrow{A'P}\right)\right| = \dfrac{3}{\sqrt{493}}$

Dạng 2: Chứng minh hai đường thẳng vuông góc.

* **Phương pháp:** Để chứng minh hai đường thẳng a, b vuông góc với nhau:

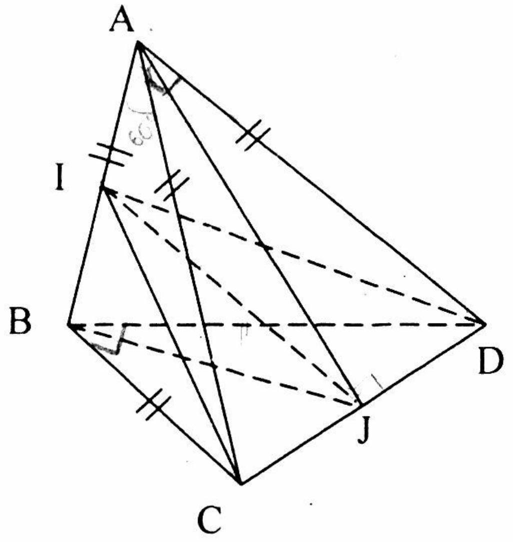
– **Cách 1:** Nếu hai đường thẳng a, b cắt nhau thì có thể áp dụng các phương pháp chứng minh vuông góc trong hình học phẳng.

– **Cách 2:** Chứng minh $\vec{u}.\vec{v} = 0$ trong đó $\vec{u} // a$; $\vec{v} // b$.

– Cách 3: Chứng minh $b // c$ và $a \perp c$ suy ra: $a \perp b$

Bài 1: *Cho tứ diện ABCD, trong đó* $AB = AC = AD = a$ $\widehat{BAC} = 60^\circ$; $\widehat{BAD} = 60^\circ$; $\widehat{CAD} = 90^\circ$. *Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng* $IJ \perp AB$; $IJ \perp CD$.

Giải:



Từ giả thiết suy ra tam giác ABC, tam giác ABD đều cạnh bằng a.

Do đó: $IC = ID$.

Hay tam giác ICD cân tại I. Vậy $IJ \perp CD$.

Từ giả thiết suy ra tam giác ACD vuông cân tại A, tam giác BCD vuông cân tại B.

Suy ra $AJ = BJ$.

Hay tam giác JAB cân tại J.

Vậy $IJ \perp AB$.

Nhận xét: *Ngoài ra ta có thể sử dụng phương pháp vectơ để giải bài toán này bằng cách:*

Chọn $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$. Ta có $|\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}| = a$.

$$\vec{b}.\vec{c} = \frac{a^2}{2};\ \vec{b}.\vec{d} = \frac{a^2}{2};\ \vec{c}.\vec{d} = 0.$$

Suy ra: $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \vec{d} - \vec{c}$.

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ} = \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c} - \vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{d} - \vec{c}) = -\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}.$$

Ta có: $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IB} = \left(-\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}\right)\vec{b}$

$$= -\frac{1}{2}\vec{b}^2 + \frac{1}{2}\vec{b}.\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}.\vec{b} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = 0$$

Suy ra $IJ \perp AB$. Ta có:

$$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{CD} = \left(-\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}\right)\left(\vec{d} - \vec{c}\right)$$

$$= -\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0.$$

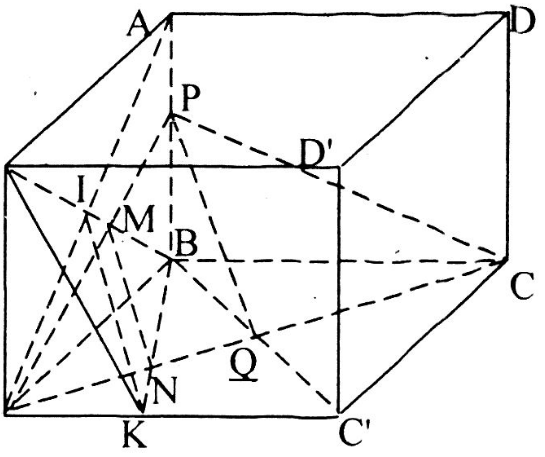
Suy ra $IJ \perp CD$.

Bài 2: *Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D'. Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc các đường chéo BA' và CB' của các mặt của hình lập phương sao cho* $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MA'}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NB'}$. *Chứng minh rằng* $MN \perp BA'$, $MN \perp CB'$.

Giải:

Gọi P là giao điểm của AB và BM'. Khi đó ta có:

$$\frac{MP}{MB'} = \frac{MB}{MA'} = \frac{1}{2}$$



Tam giác $B'PC$ cân tại P nên $PQ \perp B'C$ (Q là trung điểm của $B'C$).

Mặt khác, $\frac{NQ}{NB'} = \frac{1}{2} = \frac{MP}{MB'}$

Do đó $PQ \,//\, MN$. Suy ra $MN \perp B'C$.

Tương tự, gọi K là giao của BN và B'C'.

Khi đó: $\frac{NK}{NB} = \frac{B'N}{NC} = \frac{1}{2}$

Tam giác $A'KB$ cân tại K nên $KI \perp A'B$.

Hơn nữa $\frac{KN}{NB} = \frac{1}{2} = \frac{IM}{MB}$

Suy ra $MN \,//\, KI$. Do vậy $MN \perp A'B$.

Nhận xét: *Ta có thể giải bài toán này bằng phương pháp vectơ.*

Chọn $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{c}$.

Theo bài ra suy ra: $\overrightarrow{BA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right)$; $\overrightarrow{CN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB'} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}\right)$

Suy ra: $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right)$.

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\left(-\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right)$$

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BA'} = \frac{1}{3}\left(-\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right)\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) = \frac{1}{3}\left(-\overrightarrow{a}^2 + \overrightarrow{b}^2\right) = 0$$

(*Vì* $\overrightarrow{a}^2 = \overrightarrow{b}^2$)

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{CB'} = \frac{1}{3}\left(-\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right)\left(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}\right) = \overrightarrow{b}^2 - \overrightarrow{c}^2 = 0$$

Vậy $MN \perp BA'$ và $MN \perp CB'$.

Bài 3: *Cho hình chóp SABCD có ABCD là hình bình hành với AB = 2a; AD = a. SAB là tam giác vuông cân tại A. Gọi M là một điểm trên cạnh AD với AM = x (0 < x < a); α là mặt phẳng qua M và song song với (SAB).*

a) Chứng minh rằng α cắt hình chóp SABCD theo thiết diện là hình thang vuông.

b) Tính diện tích thiết diện đó theo a và x.

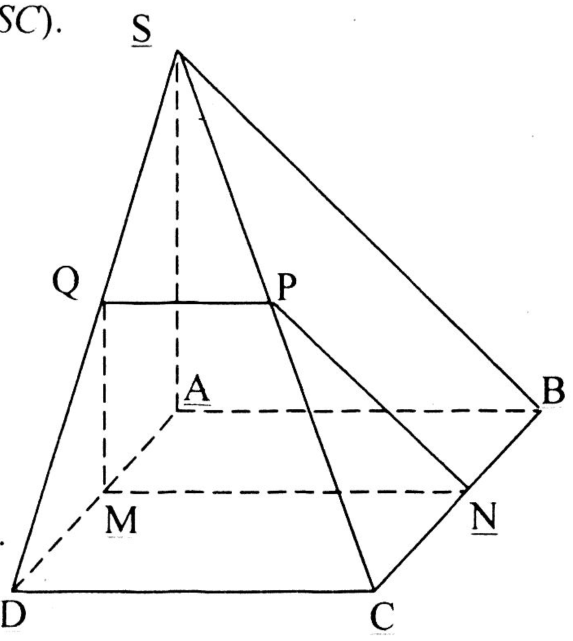
Giải:

a) Vì M là điểm chung của α và mặt phẳng $(ABCD)$; $\alpha \parallel (SAB)$ và $(SAB) \cap (ABCD) = AB$.

Do đó $\alpha \cap (ABCD) = MN \parallel AB$ $(N \in BC)$.

Tương tự: $\alpha \cap (SAD) = MQ \parallel SA$ $(Q \in SD)$.

$\alpha \cap (SBC) = NP \parallel SB$ $(P \in SC)$.



Vậy thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

Mặt khác $MN \parallel AB$

$AB \parallel CD$

Suy ra $MN \parallel CD$.

Mà $\alpha \cap (SCD) = PQ$

Nên $PQ \parallel CD \parallel MN$.

Hơn nữa, $MN \parallel AB$;

$MQ \parallel SA$;

$AB \perp SA$

Do đó: $MN \perp MQ$.

Từ đó suy ra MNPQ là hình thang vuông.

b) Ta có: $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}\left(MN + PQ\right).MQ$.

$$\text{Mà } \frac{MQ}{SA} = \frac{DM}{DA} \Rightarrow MQ = \frac{SA.DM}{DA} = 2(a - x)$$

$$\frac{PQ}{DC} = \frac{SQ}{SD} = \frac{AM}{AD} \Rightarrow PQ = \frac{DC.AM}{AD} = 2x$$

$MN = 2a$

$$\text{Vậy: } S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(2a + 2x)2(a - x) = 2\left(a^2 - x^2\right).$$

C. BÀI TẬP:

Bài 1: Cho hình hộp $ABCDA'B'C'D'$ có cạnh bằng a,

$\widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 120^\circ$.

a) Tính góc giữa các cặp đường thẳng AB và $A'D$; AC' và $B'D$.

b) Tính diện tích của hình $A'B'CD$ và $ACC'A'$.

c) Tính góc giữa các đường thẳng AC' và các đường thẳng AB, AD và AA'.

Bài 2: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M, N, P, Q, R lần lượt là trung điểm của AB, CD, AD, BC và AC.

a) Chứng minh rằng $MN \perp RP$ và $MN \perp RQ$.

b) Chứng minh rằng $AB \perp CD$.

Bài 3: Trong mặt phẳng cho tam giác đều ABC cạnh bằng a, gọi O là trung điểm AC. Lấy điểm S ở ngoài (ABC) sao cho $SA = a$ và $SA \perp BO$. α là mặt phẳng chứa BO và song song với SA.

a) Chứng minh rằng α cắt tứ diện theo thiết diện là một tam giác vuông.

b) Tính diện tích thiết diện đó.

Bài 4: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$; $AC = BD = b$; $AD = BC = c$.

a) Chứng minh các đoạn thẳng nối trung điểm của các cặp cạnh đối thì vuông góc với hai cạnh đó.

b) Tính của góc hợp bởi hai đường thẳng AC và BD.

Bài 5: Trong mặt phẳng α, cho ΔABC vuông tại A, $\widehat{B} = 60^\circ$, $AB = a$. Gọi O là trung điểm BC. Lấy điểm S ở ngoài α, sao cho $SB = a$ và $SB \perp OA$. Gọi M là điểm trên cạnh AB, mặt phẳng qua M song song với SB và OA cắt BC, SC, SA lần lượt tại N, P, Q. Đặt $x = BM$.

a) Chứng minh $MNPQ$ là hình thang vuông.

b) Tính theo a và x diện tích $MNPQ$ và tìm x để diện tích đạt giá trị lớn nhất.

Bài 6: Cho tứ diện $ABCD$ có ABC và DAB là hai tam giác đều cạnh bằng a. $DC = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và DC.

a) Chứng minh rằng MN là đường vuông góc chung của AB và DC.

b) Chứng minh $AN \perp BN$.

c) Tính góc giữa DA và BC.

Bài 7: Cho tứ diện $ABCD$.

a) Chứng minh rằng $AB \perp CD \Rightarrow AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$.

b) Từ đó suy ra nếu một tứ diện có hai cặp cạnh đối vuông góc với nhau thì cặp cạnh đối còn lại cũng vuông góc với nhau.

Bài 8: Cho hình thoi $ABCD$ cạnh là a và một điểm S ở ngoài mặt phẳng chứa hình thoi sao cho $SA = a$ và $SA \perp BC$.

1) Chứng minh ΔSAD vuông cân.

2) Tính góc giữa SD và BC.

3) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA và SC. Tính góc giữa IJ và BD.

Bài 9: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P là trung điểm của BC, AD và AC. Cho $AB = 2a$; $CD = 2a\sqrt{2}$; $MN = a\sqrt{5}$.

Tính góc giữa AB và CD.

§3: ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN:

1. **Định nghĩa:** Một đường thẳng gọi là vuông góc với mặt phẳng nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng đó.

$$a \perp (P) \Leftrightarrow a \perp c,\ \forall c \subset (P)$$

Kí hiệu: $\alpha = \left(\widehat{a,\ b}\right)$. Chú ý: $0 \le \alpha \le 90^\circ$

2. **Điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng:**

$$\left.\begin{array}{l} a \perp b \\ a \perp c \\ b, c \subset (P), b \text{ cắt } c \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp (P)$$

3. **Tính chất:**

– Qua một điểm O cho trước có duy nhất một mặt phẳng (P) vuông góc với một đường thẳng a cho trước.

– Qua một điểm O cho trước có duy nhất một đường thẳng Δ vuông góc với một mặt phẳng (P) cho trước.

$$* \left.\begin{array}{l} a // b \\ (P) \perp a \end{array}\right\} \Rightarrow (P) \perp b \qquad * \left.\begin{array}{l} a \perp (P) \\ b \perp (P) \\ a \ne b \end{array}\right\} \Rightarrow a // b$$

$$* \left.\begin{array}{l} (P) // (Q) \\ a \perp (P) \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp (Q) \qquad * \left.\begin{array}{l} (P) \perp a \\ (Q) \perp b \\ (P) \ne (Q) \end{array}\right\} \Rightarrow (P) // (Q)$$

$$* \left.\begin{array}{l} a // (P). \\ b \perp (P) \end{array}\right\} \Rightarrow b \perp a \qquad * \left.\begin{array}{l} a \not\subset (P) \\ a \perp b \\ (P) \perp b \end{array}\right\} \Rightarrow a // (P).$$

4. **Định lí ba đường vuông góc:**

Cho đường thẳng a có hình chiếu trên mặt phẳng (P) là đường thẳng a'. Khi đó, một đường thẳng b nằm trong mặt phẳng (P) vuông góc với a khi và chỉ khi b vuông góc với a'.

5. **Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:**

– Nếu $a \perp$ mp(P) thì ta nói góc giữa đường thẳng a và mp (P) bằng 90°.

– Nếu a không vuông góc với mp(P) thì góc giữa đường thẳng a và mp (P) chính là góc giữa đường thẳng a và hình chiếu a' của nó trên mp (P).

B. CÁC DẠNG TOÁN:

***Dạng 1:* Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.**

* *Phương pháp: Để chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) ta có thể:*

Cách 1: Chứng minh a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau chứa trong (P).

Cách 2: Chứng minh a song song với một đường thẳng b vuông góc với mặt phẳng (P).

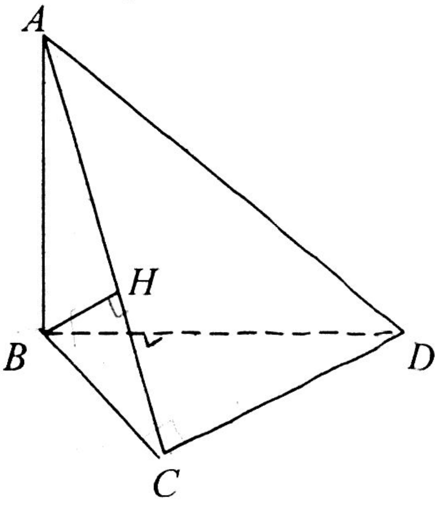
Cách 3: Chứng minh a vuông góc với mp (Q) mà mp (Q) song song với mp (P).

Bài 1: *Cho tứ diện ABCD có $AB \perp (BCD)$, tam giác BCD vuông tại C.*

a) Chứng minh $CD \perp mp(ABC)$.

b) Gọi BH là đường cao của tam giác ABC. Chứng minh rằng $BH \perp mp\,(ACD)$.

Giải:



a) Ta có $AB \perp (BCD)$ nên

$AB \perp CD$.

Mặt khác, $BC \perp CD$ (gt)

Suy ra $CD \perp (ABC)$.

b) Vì $CD \perp (ABC)$ và $BH \subset (ABC)$ nên

$BH \perp CD$.

Hơn nữa $BH \perp AC$.

Suy ra $BH \perp (ACD)$.

Bài 2: *Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Biết SA = SC, SB = SD. Chứng minh rằng:*

a) $SO \perp mp(ABCD)$.

b) $IJ \perp mp(SBD)$.

Giải:

a) Ta có tam giác SAC cân, O là trung điểm của AC nên $SO \perp AC$.

Tương tự $SO \perp BD$.

Suy ra $SO \perp (ABCD)$.

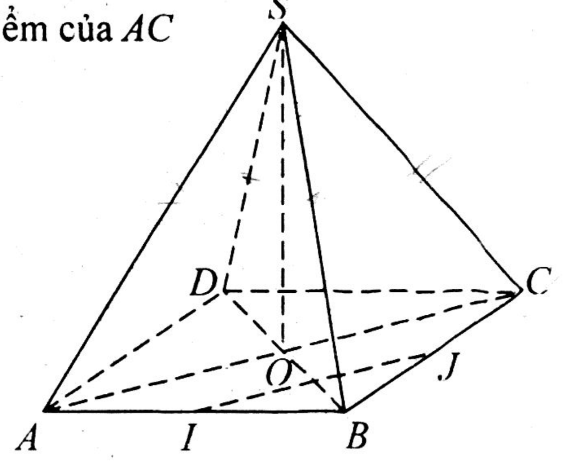
b) Ta có $AC \perp BD$ (gt)

$AC \perp SO$ (vì $SO \perp (ABCD)$).

Suy ra $AC \perp (SBD)$.

Mặt khác $IJ \,//\, AC$ (gt)

Nên $IJ \perp (SBD)$.



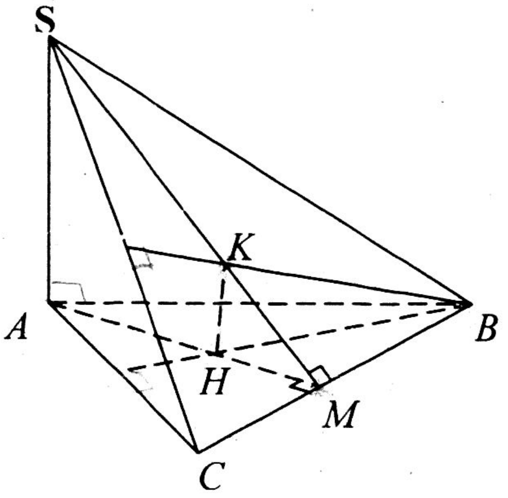
Bài 3: *Cho tứ diện SABC có $SA \perp (ABC)$. Gọi H và K lần lượt là trực tâm của tam giác ABC và SBC. Chứng minh rằng:*

a) AH, SK và BC đồng qui.

b) $SC \perp mp\,(BHK)$.

b) $HK \perp mp\,(SBC)$.

Giải:



a) Gọi M là giao của BC và AH.

Suy ra $BC \perp SM$ vì AM là hình chiếu vuông góc của SM trên (ABC).

Do đó $SM \equiv SK$.

Hay SH, SK và BC đồng qui tại M.

b) Ta có $SA \perp (ABC)$.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Nên} & SA \perp BH \\ \text{Mặt khác} & AC \perp BH\end{array}\right\} \Rightarrow BH \perp (SAC)$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Do đó} & BH \perp SC \\ \text{Hơn nữa} & BK \perp SC\end{array}\right\} \Rightarrow SC \perp (BHK).$$

c) Ta có:

$$\left.\begin{array}{l}BC \perp SM \\ BC \perp AM\end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAM)$$

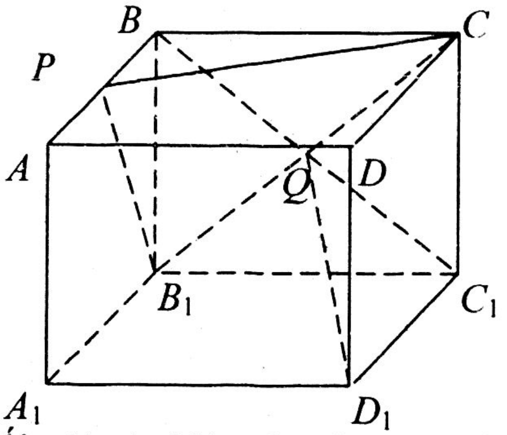
$$\left.\begin{array}{ll}\text{Suy ra} & BC \perp HK \\ \text{Mặt khác} & SC \perp HK\,(\text{vì } SC \perp (BHK))\end{array}\right\} \Rightarrow HK \perp (SBC).$$

Bài 4: *Cho hình lập phương ABCD. $A_1B_1C_1D_1$. Gọi P là trung điểm của AB; Q là giao điểm của BC_1 và CB_1. Chứng minh rằng $D_1Q \perp mp(PB_1C)$.*

Giải:

Ta có ΔD_1B_1C *đều*, Q là trung điểm của B_1C nên $D_1Q \perp B_1C$. (1)

Ta cần chứng minh $D_1Q \perp PB_1$.



Thật vậy, gọi R, S lần lượt là trung điểm của CD và CC_1. Khi đó: $RC_1 \,//\, PB_1$.

Mặt khác $QS \perp mp(CDD_1C_1)$.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Suy ra} & QS \perp RC_1 \\ \text{Hơn nữa} & D_1S \perp RC_1\end{array}\right\} \Rightarrow RC_1 \perp (QSD_1)$$

Do đó $RC_1 \perp D_1Q \Rightarrow D_1Q \perp PB_1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $D_1Q \perp$ mp (PB_1C).

* ***Nhận xét:*** Ngoài các phương pháp ở trên, đối với các bài toán này ta có thể sử dụng công cụ vectơ (phương pháp vectơ) để giải các bài toán đó. Chẳng hạn đối với:

Bài 4: *(Giải bằng phương pháp vectơ).*

Chọn hệ vectơ $\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{a}, \overrightarrow{B_1B} = \overrightarrow{b}, \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{c}$.

Khi đó $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = \overrightarrow{b}.\overrightarrow{c} = \overrightarrow{c}.\overrightarrow{a} = 0$.

$$\left|\overrightarrow{a}\right| = \left|\overrightarrow{b}\right| = \left|\overrightarrow{c}\right|.$$

Vì P là trung điểm của AB *nên:*

$$\overrightarrow{B_1P} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{B_1B}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{B_1A_1} + 2\overrightarrow{B_1B}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}.$$

Vì Q là trung điểm của B_1C nên:

$$\overrightarrow{D_1Q} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{D_1B_1} + \overrightarrow{D_1C}\right) = \frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{a} - \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}\right) = -\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b} - \frac{1}{2}\overrightarrow{c}$$

Ta có $\overrightarrow{B_1C} = \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$.

Suy ra:

$$\overrightarrow{B_1P}.\overrightarrow{D_1Q} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right)\left(-\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b} - \frac{1}{2}\overrightarrow{c}\right) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{a}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{b}^2 = 0$$

$$\overrightarrow{B_1C}.\overrightarrow{D_1Q} = \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right)\left(-\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b} - \frac{1}{2}\overrightarrow{c}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{b}^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{c}^2 = 0$$

Do đó $B_1P \perp D_1Q$ và $B_1C \perp D_1Q$.

Vậy $D_1Q \perp$ mp (PB_1C).

Dạng 2: ***Chứng minh đường thẳng vuông góc với đường thẳng.***

* *Phương pháp:* *Ngoài các phương pháp chứng minh đã được nêu trong §2, ta có thể sử dụng các phương pháp chứng minh sau để chứng minh đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b:*

- *Chứng minh* $a \perp (P)$ mà $(P) \supset b$.
- *Áp dụng định lí ba đường vuông góc.*

Bài 1: *Cho tứ diện ABCD có* $DA \perp (ABC)$. *Dựng đường cao AE của* ΔABC.

a) Chứng minh $DE \perp BC$.

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên DE. Chứng minh rằng $AH \perp DC$.

Giải:

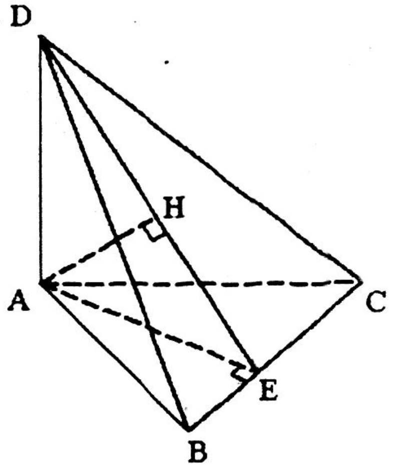
a) Ta có $DA \perp (ABC)$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Nên} & DA \perp BC \\ \text{Mặt khác} & AE \perp BC\end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (ADE)$$

Suy ra $DE \perp BC$.

b) Ta có $BC \perp (ADE)$.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Nên} & BC \perp AH \\ \text{Mặt khác} & DE \perp AH\end{array}\right\} \Rightarrow AH \perp (DBC)$$



Suy ra $AH \perp DC$.

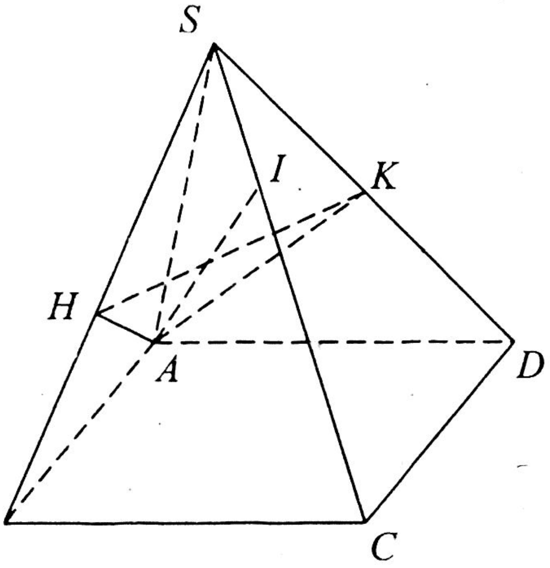
Bài 2: *Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông $SA \perp mp(ABCD)$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB; SD.*

a) Chứng minh các mặt bên của hình chóp SABCD là các tam giác vuông.

b) Chứng minh $AH \perp SC$; $AK \perp SC$.

c) Mặt phẳng (AHK) cắt SC tại I, chứng minh $HK \perp AI$.

Giải:



a) $SA \perp (ABCD)$. Suy ra $SA \perp AB$; $SA \perp AD$.

Vậy tam giác SAB và SAD vuông tại A.

Hơn nữa $\left.\begin{matrix} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

Suy ra $BC \perp SB$ hay ΔSBC vuông tại B.

Chứng minh tương tự, ΔSCD vuông tại D.

b) Ta có $BC \perp (SAB)$

$\left.\begin{matrix} \text{Suy ra} & BC \perp AH \\ \text{Mặt khác} & SB \perp AH \end{matrix}\right\} \Rightarrow AH \perp (SBC)$

Vậy $AH \perp SC$.

Chứng minh tương tự ta có $AK \perp SC$.

c) Ta có tam giác vuông SAB bằng tam giác vuông SAD

(Vì $AB = AD$; SA chung)

Suy ra $\left.\begin{matrix} SB = SD \\ SH = SK \end{matrix}\right\} \Rightarrow \dfrac{SH}{SB} = \dfrac{SK}{SD} \Rightarrow HK // BD$

Mặt khác $\left.\begin{matrix} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow BD \perp (SAC)$

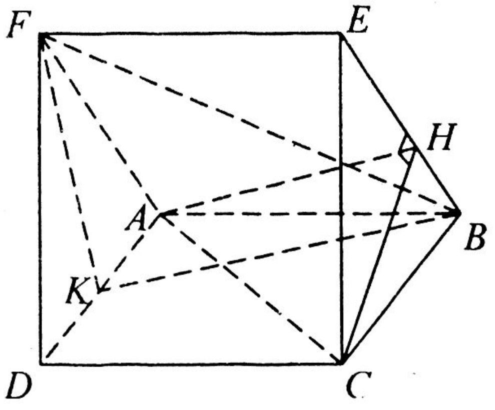
Suy ra $HK \perp (SAC)$. Do đó $HK \perp AI$.

Bài 3: *Cho hai hình chữ nhật ABCD, ABEF nằm trên hai mặt phẳng khác nhau sao cho hai đường chéo AC và BF vuông góc với nhau. Gọi CH, FK là hai đường cao của tam giác BCE và ADF.*

a) Chứng minh rằng ACH và BFK là hai tam giác vuông.

b) Chứng minh $AH \perp BF$ và $BK \perp AC$.

Giải:



a) Ta có:

$\left.\begin{matrix} AB \perp BC \\ AB \perp BE \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \perp (BCE)$.

$\left.\begin{matrix} \text{Suy ra} & AB \perp CH \\ \text{Mặt khác} & BE \perp CH \end{matrix}\right\} \Rightarrow CH \perp (ABEF)$

Suy ra $CH \perp AH$ hay ΔACH vuông tại H.

Chứng minh tương tự ta có ΔBKF vuông tại K.

b) Ta có $CH \perp (ABEF)$ (chứng minh trên)

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Suy ra} & CH \perp BF \\ \text{Mặt khác} & AC \perp BF\end{array}\right\} \Rightarrow BF \perp (ACH).$$

Vậy $BF \perp AH$.

Chứng minh tương tự ta có $BK \perp AC$.

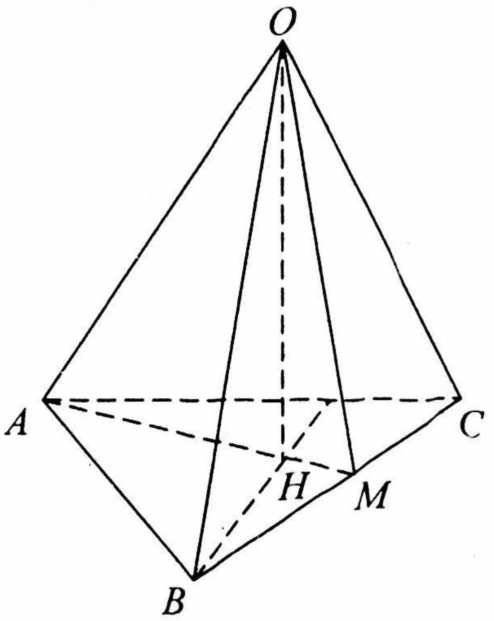
Bài 4: *Cho tứ diện OABC có OA; OB; OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm O lên mặt phẳng (ABC). Chứng minh rằng:*

a) H là trực tâm tam giác ABC.

b) $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$

c) Các góc của tam giác ABC đều nhọn.

Giải:



a) Ta có: $\left.\begin{array}{l} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{array}\right\} \Rightarrow OA \perp (OBC)$.

Suy ra $OA \perp BC$.

Mặt khác AH là hình chiếu vuông góc của OA lên mp (ABC) nên $AH \perp BC$.

Tương tự, ta chứng minh được $BH \perp AC$.

Vậy H là trực tâm của tam giác ABC.

b) Gọi M là giao điểm của AH và BC.

Tạ có $BC \perp (OAH)$ suy ra $BC \perp OM$.

Mặt khác, $OA \perp (OBC)$ nên $OA \perp OM$.

Và $OH \perp (ABC)$ nên $OH \perp AM$.

Vậy trong tam giác vuông OAM ta có: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OM^2}$

Hơn nữa, xét trong tam giác vuông OBC ta có: $\dfrac{1}{OM^2} = \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$

Từ đó suy ra: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

c) Đặt $OA = a$; $OB = b$; $OC = c$.

Khi đó ta có: $AB^2 = a^2 + b^2$; $AC^2 = a^2 + c^2$; $BC^2 = b^2 + c^2$.

Ta có: $\cos A = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \dfrac{2a^2}{2AB.AC} > 0$

Vậy A là góc nhọn.

Tương tự; B, C là góc nhọn. Hay các góc của tam giác ABC đều nhọn.

***Dạng 3:* Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng qua 1 điểm và vuông góc với một đường thẳng cho trước.**

* *Phương pháp:* *Cho khối đa diện (S), tìm thiết diện của (S) tạo bởi mặt phẳng α qua điểm M cho trước và vuông góc với đường thẳng Δ cho trước.*

– Cách 1: Tìm hai đường thẳng cắt nhau hay chéo nhau a, b cùng vuông góc với Δ. Khi đó mặt phẳng α qua M và α song song hoặc chứa a hay b. Từ đó quy về dạng tìm thiết diện theo quan hệ song song.

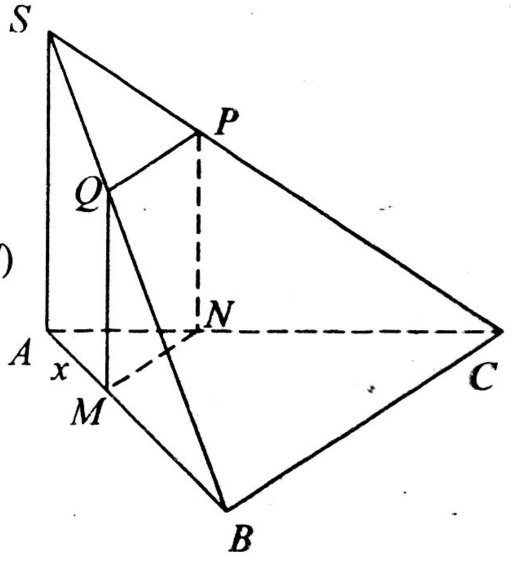
– Cách 2: Xác định mặt phẳng α bằng cách dựng hai đường thẳng cắt nhau cùng vuông góc với d, trong đó có ít nhất một đường thẳng qua M. Mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng trên chính là α và quy về dạng tìm thiết diện theo quan hệ song song.

Bài 1: *Cho tứ diện SABC có ABC là tam giác vuông cân tại B; AB = a. SA ⊥ (ABC) và SA = $a\sqrt{3}$. M là điểm tuỳ ý trên cạnh AB sao cho AM = x (0 < x < a). Gọi α là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB.*

a) Tìm thiết diện của tứ diện tạo bởi α.

b) Tính diện tích thiết diện theo a và x. Tìm x để diện tích thiết diện có giá trị lớn nhất.

Giải:



a) Ta có $SA \perp AB$.

$BC \perp AB$.

$\alpha \perp AB$.

Suy ra $SA // \alpha$; $BC // \alpha$.

Vậy $\alpha \cap (SAB) = MQ // SA$ $(Q \in SB)$

$\alpha \cap (ABC) = MN // BC$ $(N \in AC)$

$\alpha \cap (SAC) = NP // SA$ $(P \in SC)$

Do đó thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

b) Ta có $MQ // NP // SA$

$MN // QP // BC$

Mặt khác $MQ // SA$

$MN // BC$

$SA \perp BC$ (Vì $SA \perp (ABC)$)

Suy ra $MQ \perp MN$.

Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Khi đó $S_{MNPQ} = MQ.MN$

Ta có $\dfrac{MQ}{SA} = \dfrac{BM}{BA} \Rightarrow MQ = \dfrac{SA.BM}{BA} = \dfrac{a\sqrt{3}.(a-x)}{a} = \sqrt{3}(a-x)$

$\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{AM}{AB} \Rightarrow MN = \dfrac{BC.AM}{AB} = \dfrac{a.x}{a} = x$

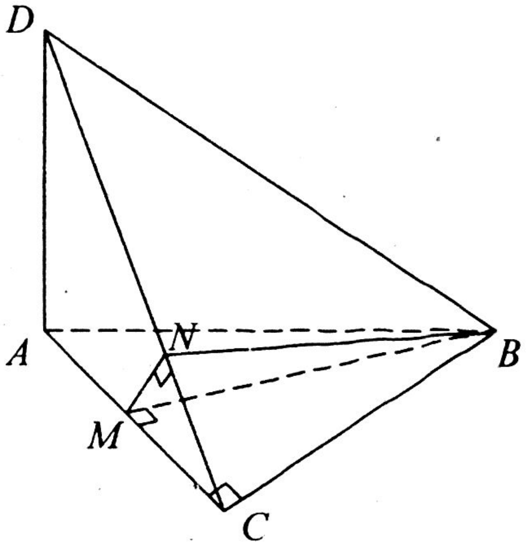
Vậy $S_{MNPQ} = \sqrt{3}x(a-x) \le \sqrt{3}\left(\dfrac{x+a-x}{2}\right)^2$

Hay $S_{MNPQ} \le \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$

Vậy S_{MNPQ} đạt giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$ khi $x = a - x \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{2}$.

Bài 2: ***Cho tứ diện ABCD có tam giác ABC đều cạnh a. DA ⊥ (ABC) và DA = 2a. Gọi α là mặt phẳng qua B và vuông góc với DC. Tìm thiết diện của tứ diện với α và tìm diện tích thiết diện đó.***

Giải:



Gọi M là trung điểm của AC.

Khi đó: $BM \perp AC$.

$BM \perp DA$ (vì $DA \perp (ABC)$)

Suy ra $BM \perp (DAC)$.

Vậy $BM \perp DC$.

Dựng $MN \perp DC$ tại N.

Suy ra $DC \perp (BMN)$ hay $\alpha \equiv (BMN)$

Như vậy, thiết diện cần tìm là ΔBMN.

Vì $BM \perp (DAC)$ nên $BM \perp MN$.

Vậy ΔBMN vuông tại M.

Do đó $S_{BMN} = \dfrac{1}{2}BM.MN$,

trong đó $BM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Mặt khác, tam giác vuông CNM đồng dạng tam giác vuông CAD (vì $\hat{C}$ chung)

Suy ra $\dfrac{MN}{DA} = \dfrac{CM}{CD} \Rightarrow MN = \dfrac{DA.CM}{CD} = \dfrac{2a.\frac{a}{2}}{\sqrt{4a^2+a^2}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$

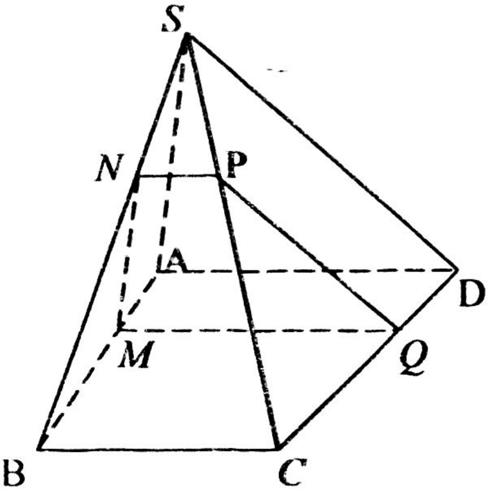
Vậy $S_{\Delta BMN} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a\sqrt{5}}{5} = \dfrac{a\sqrt{15}}{20}$.

Bài 3: ***Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thanh vuông tại A và B với AB = BC = a; AD = 2a; SA ⊥ (ABCD) và SA = 2a. Gọi M là điểm trên cạnh AB. α là mặt phẳng qua M, vuông góc với AB.***

a) Tìm thiết diện của α với hình chóp SABCD. Thiết diện là hình gì?

b) Đặt $AM = x$ $(0 \le x \le a)$. Tính diện tích thiết diện theo a và x.

Giải:



Ta có: $BC \perp AB$

$SA \perp AB$ (vì $SA \perp (ABCD)$).

$\alpha \perp AB$

Suy ra $\alpha // SA$; $\alpha // BC$.

Khi đó:

$\alpha \cap (SAB) = MN // SA$ $(N \in SB)$

$\alpha \cap (ABCD) = MQ // BC$ $(Q \in CD)$

$\alpha \cap (SBC) = NP // BC$ $(P \in SC)$

Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác $MNPQ$.

Ta có $NP // MQ$ (Vì cùng song song với BC)

Mặt khác: $\left.\begin{array}{l} MN // SA \\ MQ // BC \\ SA \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow MN \perp MQ$

Vậy $MNPQ$ là hình thang vuông.

b) Tính $S_{MNPQ} = \dfrac{1}{2} MN\left(MQ + NP\right)$.

Ta có: $\dfrac{MN}{SA} = \dfrac{BM}{BA} \Rightarrow MN = \dfrac{2a(a-x)}{a} = 2(a-x)$

$$\frac{NP}{BC} = \frac{SN}{SB} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow NP = \frac{a.x}{a} = x$$

$$\frac{EQ}{ID} = \frac{CE}{CI} = \frac{BM}{BA} \Rightarrow EQ = \frac{a(a-x)}{a} = a - x$$

$$MQ = ME + EQ = a + a - x = 2a - x$$

Vậy $S_{MNPQ} = \dfrac{1}{2}\left(2a - x + x\right).2\left(a - x\right) = 2a\left(a - x\right)$.

C. BÀI TẬP:

Bài 1: Cho tứ diện $ABCD$ có ABC và DBC là hai tam giác đều. Gọi I là trung điểm của BC.

a) Chứng minh rằng $BC \perp$ mp(AID).

b) AH là đường cao của ΔAID. Chứng minh rằng $AH \perp$ mp(BCD).

Bài 2: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và $SC = a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của cạnh AB và AD.

a) Chứng minh rằng $SH \perp$ mp$(ABCD)$.

b) Chứng minh rằng $AC \perp SK$ và $CK \perp SD$.

Bài 3: Cho hình chóp $SABCD$ có $ABCD$ là hình vuông. $SA \perp$ mp($ABCD$).

a) Chứng minh rằng $DB \perp$ mp(SAC).

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SC và SD.

Chứng minh rằng $MN \perp$ mp(SAD).

Bài 4: Cho hình chóp $SABCD$ có $SA \perp$ mp($ABCD$) và $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D với $AD = DC = \frac{AB}{2}$. Gọi I là trung điểm của AB.

a) Chứng minh các mặt bên của hình chóp đều là tam giác vuông.

b) Chứng minh rằng $CI \perp SB$ và $DI \perp SC$.

Bài 5: Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BB_1. P là giao điểm của DC_1 và CD_1.

a) Chứng minh rằng $MN \perp A_1C$. b) Chứng minh rằng $B_1P \perp (PD_1C)$.

Bài 6: Cho tứ diện $ABCD$ có $AD \perp$ mp(ABC), tam giác ABC vuông tại C.

a) Chứng minh rằng các mặt bên của tứ diện đều là tam giác vuông.

b) Kẻ đường cao CH ($H \in AB$); AK ($K \in DC$) của các tam giác ABC và DAC. Chứng minh rằng các tam giác CHD; AKB là các tam giác vuông.

c) Gọi M, N, O lần lượt là các trung điểm của AC; AD và AB. Chứng minh rằng các tam giác OMN; KMN; KNO đều là tam giác vuông.

Bài 7: Cho hình chóp $SABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, mặt bên SBC vuông tại B, mặt bên SCD vuông tại D có $SC = a\sqrt{5}$.

a) Chứng minh $SA \perp$ mp($ABCD$), tính SA.

b) Đường thẳng qua A vuông góc với AC cắt các đường thẳng CB, CD lần lượt tại I, J. Gọi H là hình chiếu của A trên SC. Hãy xác định các giao điểm M, N của SB, SD với mặt phẳng (HIJ). Chứng minh rằng $AM \perp (SBC)$, $AN \perp (SCD)$.

c) Tính diện tích $AMHN$.

Bài 8: Cho hình chóp $SABCD$, đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều có $AB=BC=CD= a$; $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. M và I là các điểm trên cạnh SB, SD sao cho $SM = \frac{3}{4}SB$; $SI = \frac{3}{7}SD$. Mặt phẳng (AMI) cắt SC tại N.

a) Chứng minh rằng $SD \perp (AMI)$.

b) Chứng minh rằng N là trung điểm của SC.

c) Chứng minh rằng $AN \perp NI$ và $AM \perp MI$.

d) Tính diện tích thiết diện tạo bởi (AMI) và hình chóp.

Bài 9: Cho hình chóp $SABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Dựng đường cao AH của tam giác SAB.

a) Chứng minh rằng $\frac{SH}{SB} = \frac{2}{3}$.

b) Gọi α là mặt phẳng qua A và vuông góc với SB. α cắt hình chóp $SABCD$ theo thiết diện là hình gì? Tính diện tích thiết diện.

Bài 10: Cho hình tứ diện $SABC$ có tam giác ABC đều cạnh bằng a. $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Gọi M là điểm tuỳ ý trên cạnh AC, $CM = x$ $(0 < x < a)$ là mặt phẳng qua A và $\alpha \perp AC$.

a) Tuỳ theo vị trí của điểm M có nhận xét gì về thiết diện của hình chóp tạo bởi α.

b) Tính diện tích S của thiết diện trên theo a và x. Xác định x để diện tích có giá trị lớn nhất. Tính diện tích lớn nhất đó.

§4: HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN:

I. *Góc giữa hai mặt phẳng*:

1. Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

2. Qui tắc xác định góc giữa 2 mặt phẳng.

Khi mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ, để tính góc giữa chúng, ta chỉ việc xét một mặt phẳng (R) vuông góc với Δ lần lượt cắt (P) và (Q) theo giao tuyến p, q. Khi đó $\widehat{((P);(Q))} = \widehat{(p,q)}$.

3. Gọi S là diện tích của đa giác H trong (P) và S' là diện tích của hình chiếu S' trên (P') thì S' = S. cosφ, với φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (P').

II. *Hai mặt phẳng vuông góc:*

1. *Định nghĩa*: Hai mặt phẳng vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^0.

2. *Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc:*

* Định lí: Nếu một mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng khác thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.

* Một số hệ quả:

$$a)\ \left.\begin{array}{l}(P)\perp(Q)\\(P)\cap(Q)=c\\a\subset(P)\\a\perp c\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp Q$$

$$b)\ \left.\begin{array}{l}(P)\perp(Q)\\ A\in(P)\\ a\perp(Q)\\ A\in c\end{array}\right\}\Rightarrow a\subset(P)$$

$$c)\ \left.\begin{array}{l}(P)\cap(Q)=a\\ (P)\perp(R)\\ (Q)\perp(R)\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp(R)$$

B. CÁC DẠNG TOÁN:

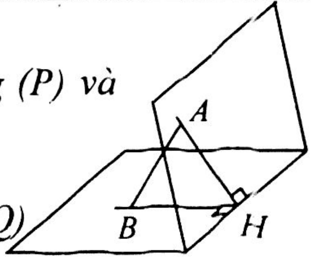
***Dạng 1:* Xác định góc giữa hai mặt phẳng.**

* *Phương pháp: Để xác định góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) hay góc phẳng nhị diện ta thực hiện:*

– Tìm giao tuyến c của hai mặt phẳng (P) và (Q).

– Tìm một đường thẳng vuông góc với c cắt (P), (Q) tại A và B.

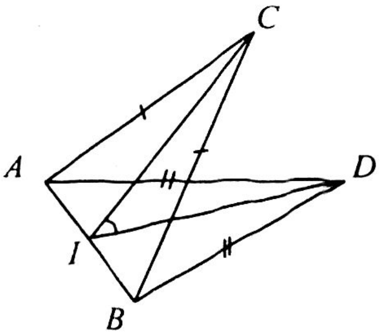
– Từ A hoặc B dựng đường thẳng vuông góc với c tại H.



Khi đó $(\widehat{(P),(Q)})=\widehat{AHB}$ *: gọi là góc phẳng nhị diện cạnh c. .*

Chú ý:

+ Nếu hai mặt của nhị diện lần lượt chứa hai tam giác cân ABC, ABD có chung đáy AB thì $\widehat{CID}$ *là góc phẳng nhị diện với I là trung điểm của AB.*



+ Nếu a, b là hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng (P), (Q) thì $(\widehat{(P),(Q)})=(\widehat{a,b})$.

+ Nếu góc phẳng nhị diện bằng 90° *thì hai mặt phẳng tạo thành nhị diện đó là vuông góc với nhau.*

Bài 1: *Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác vuông cân BA = BC = a, SA ⊥ mp(ABC) và SA = a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC.*

a) Tính góc giữa các mp(SAC) và mp(SBC).

b) Tính góc giữa các mp (SMN) và mp(SBC).

Giải:

a) Ta có $\left.\begin{array}{l}BN\perp AC\\ BN\perp SA\end{array}\right\}\Rightarrow BN\perp(SAC).$

Suy ra $BN\perp SC$.

Dựng $BK\perp SC$ tại K.

Khi đó $SC \perp (BKN)$.

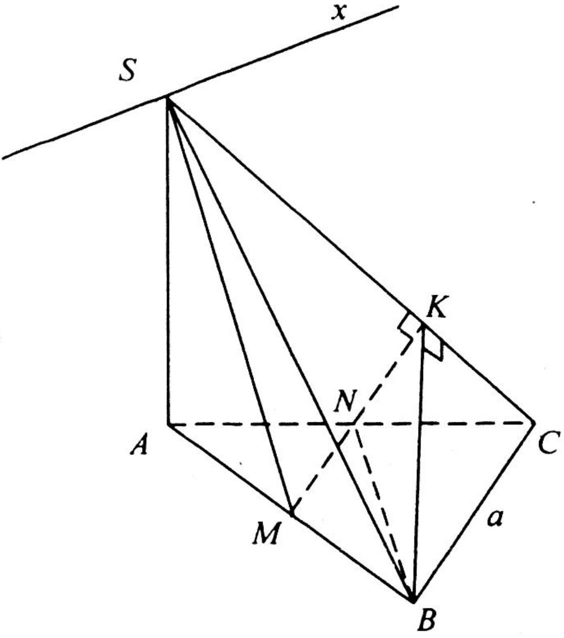
Vậy $\widehat{((SAC),(SBC))} = \widehat{BKN}$.

Ta có $\triangle SAC \backsim \triangle NKC$

(vì C là góc nhọn chung)

Suy ra $\dfrac{NK}{SA} = \dfrac{NC}{SC}$

$$\Rightarrow NK = \frac{SA.NC}{SC} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$



Mặt khác, $BN \perp (SAC)$

$\Rightarrow BN \perp NK$ hay ΔBNK vuông tại N.

$$\text{Do đó } \tan\widehat{BKN} = \frac{BN}{NK} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{6}} = \sqrt{3}$$

Vậy $\widehat{BKN} = 60^o = \widehat{((SAC);(SBC))}$.

b) Ta có $\left.\begin{aligned} &MN \,//\, BC \\ &S \in (SMN) \cap (SBC) \end{aligned}\right\} \Rightarrow (SMN) \cap (SBC) = Sx \,//\, BC \,//\, MN.$

Hơn nữa $BC \perp SB$ và $BC \perp SM$.

Suy ra $Sx \perp SB$ và $Sx \perp SM$.

Hay $\widehat{((SMN):(SBC))} = \widehat{BSM}$

Trong tam giác SBM ta có: $BM^2 = SM^2 + SB^2 - 2SM.SB\cos\widehat{BSM}$

$$\Rightarrow \cos\widehat{BSM} = \frac{SM^2 + SB^2 - BM^2}{2SM.SB}$$

Trong đó $SM = \sqrt{SA^2 + AM^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$; $SB = a\sqrt{2}$; $BM = \dfrac{a}{2}$.

$$\text{Vậy } \cos\widehat{BSM} = \frac{\frac{5a^2}{4} + 2a^2 - \frac{a^2}{4}}{2 \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot a\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \widehat{BSM} = \arccos\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

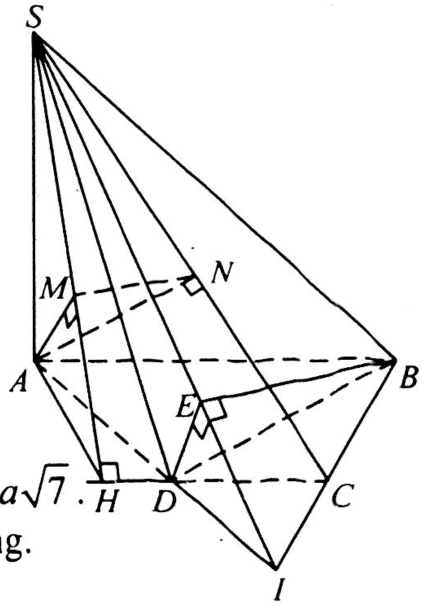
Do đó, góc giữa 2 mp (SMN) và (SBC) là góc $\alpha = \arccos\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

Bài 2: *Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính* $AB = 2a$; $SA \perp mp(ABCD)$ *và* $SA = a\sqrt{3}$.

a) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

b) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

Giải:



a) Gọi I là giao điểm của AD và BC.

Khi đó giao tuyến của (SAD) và (SBC) là SI.

$$\text{Ta có } \left.\begin{matrix} BD \perp AD \\ BD \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow BD \perp (SAD).$$

$$\left.\begin{matrix} \text{Suy ra } & BD \perp SI \\ \text{Dựng } & DE \perp SI \end{matrix}\right\} \Rightarrow SI \perp (BDE).$$

Vậy $\widehat{((SAD);(SBC))} = \widehat{BED}$.

Từ giả thiết suy ra $AI = AB = 2a$.

Do đó, $SI^2 = SA^2 + AI^2 = 3a^2 + 4a^2 = 7a^2 \Rightarrow SI = a\sqrt{7}$.

Mặt khác ⊿SAI ∽ ⊿DEI vì có góc nhọn I chung.

Suy ra $\dfrac{DE}{SA} = \dfrac{DI}{SI} \Rightarrow DE = \dfrac{SA.DI}{SI} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Vì $BD \perp (SAD)$ nên $BD \perp DE$.

$\tan\widehat{BED} = \dfrac{BD}{DE} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\dfrac{a\sqrt{21}}{7}} = \sqrt{7}$. Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là $\alpha = \arctan\sqrt{7}$.

b) Dựng $AH \perp CD$ tại H; $AM \perp SH$ tại M.

$$\text{Ta có } \left.\begin{matrix} CD \perp AH \\ CD \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow CD \perp (SAH).$$

$$\text{Suy ra } \left.\begin{matrix} CD \perp AM \\ SH \perp AM \end{matrix}\right\} \Rightarrow AM \perp (SCD)$$

Tương tự, dựng $AN \perp SC$ tại N thì $AN \perp (SBC)$.

Từ đó suy ra $\widehat{((SCD);(SBC))} = \widehat{MAN}$.

Mặt khác, xét ⊿SAM:

$$\frac{1}{AM^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{\dfrac{3a^2}{4}} = \frac{5}{3a^2}$$

$$\Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{15}}{5}$$

Xét ⊿SAC: $SA = AC = a\sqrt{3}$ nên tam giác SAC vuông cân tại A.

Suy ra $AN = \dfrac{1}{2}SC = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

Vì $AM \perp (SCD)$ nên $AM \perp AN$. Vậy $\cos\widehat{MAN} = \dfrac{AM}{AN} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SBC) là $\alpha = \arccos\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

Bài 3: *Cho hình vuông ABCD cạnh bằng a trong mặt phẳng (P). Hai điểm M, N lần lượt di động trên cạnh CB và CD. Đặt CM = x, CN = y. Trên đường thẳng At ⊥ mp(P) lấy điểm S. Tìm hệ thức liên hệ giữa x và y sao cho:*

a) Các mặt phẳng (SAM) và (SAN) tạo với nhau một góc 45°.

b) Các mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau.

Giải:

a) Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AM; SA \perp AN$.

Suy ra $\left(\widehat{(SAM):(SBN)}\right) = \widehat{MAN}$.

Theo bài ra ta có $\widehat{MAN} = \dfrac{\pi}{4}$

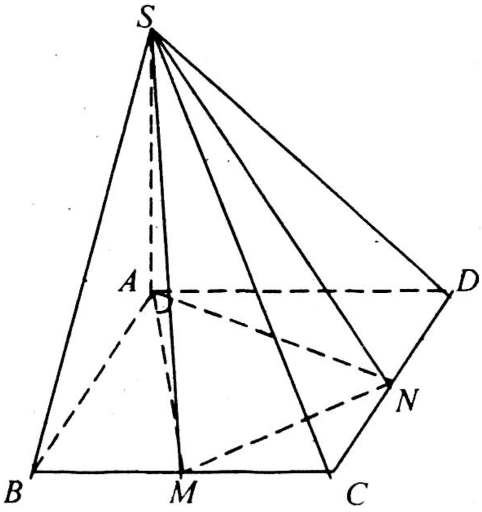
Đặt $\widehat{BAM} = \alpha$; $\widehat{DAN} = \beta$.

Khi đó $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{4}$

Suy ra $\tan(\alpha + \beta) = 1 = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha.\tan\beta}$

$\Leftrightarrow \dfrac{a-x}{a} + \dfrac{a-y}{a} = 1 - \dfrac{(a-x)(a-y)}{a^2}$

$\Leftrightarrow a(x+y) - (a-x)(a-y) = a^2$



b) Ta có $(SAM) \perp (SMN) \Rightarrow AM \perp MN$.

$\Rightarrow AM^2 + MN^2 = AN^2 \Rightarrow a^2 + (a-x)^2 + x^2 + y^2 = a^2 + (a-y)^2$

$\Rightarrow x^2 = a(x-y)$.

Bài 4: *Cho tứ diện ABCD có DA ⊥ mp(ABC); tam giác ABC vuông tại B và $\widehat{BSC} = 45^o$. Gọi $\widehat{ADB} = \alpha$. Xác định α để góc giữa hai mặt phẳng (ADC) và (BDC) bằng 60°.*

Giải:

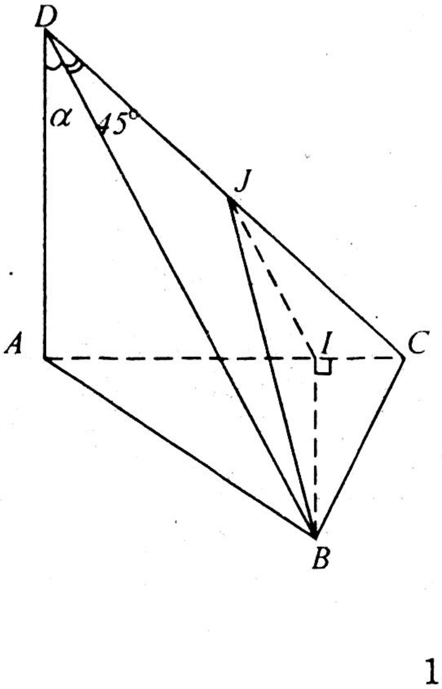
Dựng $BI \perp AC$.

Ta có $BI \perp DA$ (vì $DA \perp (ABC)$)

Suy ra $BI \perp (DAC) \Rightarrow BI \perp DC$.

Dựng $BJ \perp DC$.

Suy ra $DC \perp (BIJ)$.



Vậy $\left(\widehat{(ADC);(BDC)}\right)=\widehat{BIJ}$

Ta có ΔBIJ vuông tại I (vì $BI\perp(DAC)$)

Theo bài ra, $\widehat{BIJ}=60^\circ$ nên ΔBIJ là nửa tam giác đều.

Suy ra $BI=\dfrac{\sqrt{3}.BJ}{2}\Rightarrow\dfrac{1}{BI^2}=\dfrac{4}{3BJ^2}$

Mặ khác, ΔSBC vuông tại B (vì $BC\perp(DAB)$) nên $\widehat{BDC}=45^\circ$ nên DBC là tam giác vuông cân tại B, hay $DB=BC$.

Ta có $\sin\alpha=\dfrac{AB}{DB}=\dfrac{AB}{BC}\Rightarrow AB=BC.\sin\alpha$

Hơn nữa, trong ΔABC vuông tại B có:

$$\frac{1}{BI^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{BC^2}=\frac{1}{BC^2}\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}+1\right)$$

Trong Δ vuông DJB tại J có $\widehat{JDB}=45^\circ$ nên ΔDJB vuông cân tại J, do đó $DB=\sqrt{2}BJ\Rightarrow\dfrac{1}{BJ^2}=\dfrac{2}{DB^2}=\dfrac{2}{BC^2}$.

Từ đó suy ra: $\dfrac{1}{BC^2}\left(\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+1\right)=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{2}{BC^2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+1=\dfrac{8}{3}\Leftrightarrow\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

Vậy $\alpha=\arcsin\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

***Dạng 2:* Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc.**

* *Phương pháp: Để chứng minh hai mặt phẳng vuông góc ta thực hiện.*

Cách 1: Chứng minh mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

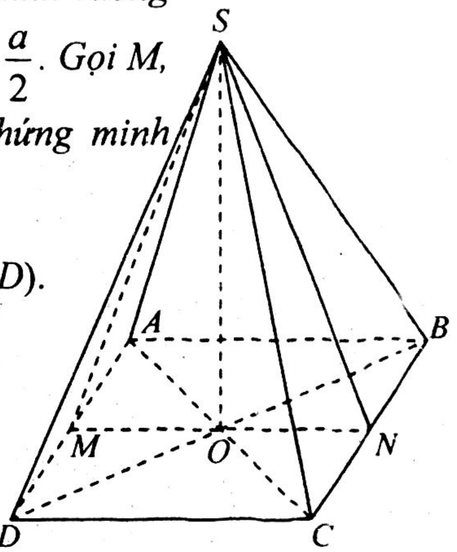
Cách 2: Chứng minh góc giữa 2 mặt phẳng bằng 90°.

Bài 1: *Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O, $AB=a$. $SO\perp mp(ABCD)$ và $SO=\dfrac{a}{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Chứng minh rằng:*

a) mp $(SAC)\perp mp(SBD)$.

b) mp $(SMN)\perp mp(SBC)$; mp $(SMN)\perp mp(SAD)$.

c) mp $(SAD)\perp mp(SBC)$.



Giải:

a) Ta có $AC\perp BD$

$AC\perp SO$ vì $SO\perp(ABCD)$.

Suy ra $AC\perp(SBD)$

Mà $AC \subset (SAC)$

Nên $(SAC) \perp (SBD)$.

b) Ta có $\left.\begin{array}{l} BC \perp MN \\ BC \perp SO \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SMN)$.

Mà $BC \subset (SBC) \Rightarrow (SMN) \perp (SBC)$.

Tương tự, ta chứng minh $(SMN) \perp (SAD)$.

c) Ta có $SO = \dfrac{a}{2} = \dfrac{MN}{2}$. Vậy tam giác SMN vuông tại S.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Hay} & SM \perp SN \\ \text{Mặt khác} & SM \perp BC \ (\text{vì } BC \perp (SMN)) \end{array}\right\} \Rightarrow SM \perp (SBC).$$

Mà $SM \subset (SAD) \Rightarrow (SAD) \perp (SBC)$.

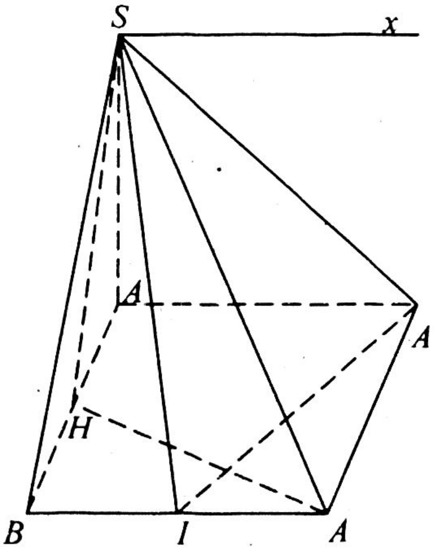
Bài 2: *Cho hình vuông $ABCD$, S là điểm trong không gian sao cho SAB là tam giác đều và mp$(SAB) \perp$ mp$(ABCD)$.*

a) Chứng minh rằng mp$(SAB) \perp$ mp(SAD), mp$(SAB) \perp$ mp(SBC).

b) Tính góc giữa mp(SAD) và mp(SBC).

c) Gọi H và I lần lượt là trung điểm của AB và BC. Chứng minh rằng mp$(SHC) \perp$ mp(SDI).

Giải:



a) Ta có $SH \perp AB$ (vì ΔSAB đều)

Mà $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$.

Suy ra $SH \perp AD$.

Hơn nữa $AB \perp AD$.

Nên $AD \perp (SAB)$.

Do đó $(SAB) \perp (SAD)$.

Tương tự ta có $(SBC) \perp (SAD)$.

b) Ta có $(SAD) \cap (SBC) = Sx \,//\, AD$.

Mà $AD \perp (SAB)$ nên $Sx \perp (SAB)$.

Do đó $\left(\widehat{(SAD);(SBC)}\right) = \widehat{ASB} = 60^\circ$

c) Ta có $DI \perp HC$ (vì $ABCD$ là hình vuông).

$DI \perp SH$ (vì $SH \perp (ABCD)$).

Suy ra $DI \perp (SHC)$.

Do đó $(SDI) \perp (SHC)$.

Bài 3: *Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh là a tâm O và $BO = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$, $SO \perp$ mp$(ABCD)$ và $SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Chứng minh rằng mp$(SAB) \perp$ mp(SAD).*

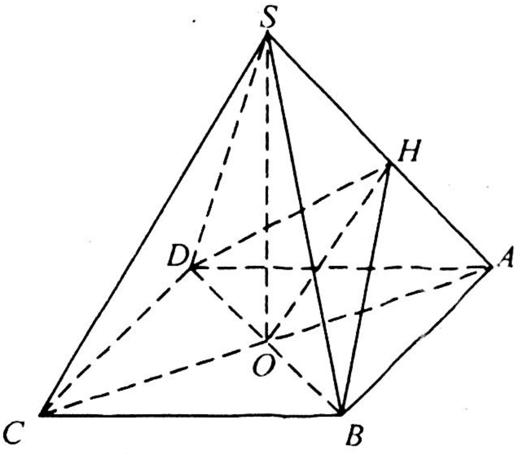
Giải:

Dựng $OH \perp SA$ tại H.

Ta có $BD \perp SA$ vì $BD \perp (SAC)$.

Suy ra $SA \perp (BHD)$.

Do đó, $\left(\widehat{(SAB);(SAD)}\right) = \widehat{BHD}$.



Ta có ΔOAB vuông nên

$$OA^2 = AB^2 - OB^2 = \frac{2a^2}{3}$$

$$\Rightarrow OA = \frac{a\sqrt{6}}{3} = SO$$

Suy ra $\widehat{OAS} = 45^\circ$.

Vậy ΔOHA vuông cân tại H.

Do đó $OH = \frac{OA}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Vậy $OH = OB = OD$.

Từ đó suy ra $\widehat{BHD} = 90^\circ$ hay $(SAB) \perp (SAD)$.

Dạng 3: Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.

* *Phương pháp: Ngoài cách chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) đã nêu ở §3, ta có thể áp dụng các cách sau:*

– *Chứng minh* $\begin{cases} a \subset (Q) \\ (Q) \perp (P) \\ (Q) \cap (P) = c \\ a \perp c \end{cases}$ *Từ đó suy ra* $a \perp (P)$.

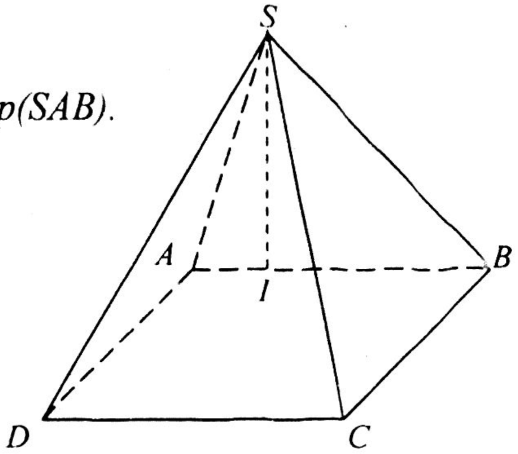
– *Chứng minh* $\begin{cases} a = (Q) \cap (R) \\ (Q) \perp (P) \\ (R) \perp (P) \end{cases}$ *Từ đó suy ra* $a \perp (P)$.

Bài 1: *Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật. Mặt SAB là tam giác cân tại S và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi I là trung điểm của AB.*

a) Chứng minh rằng $SI \perp mp(ABCD)$.

b) Chứng minh rằng AD vuông góc với mp(SAB).

Giải:



a) Vì ΔSAB cân tại S nên:

$$SI \perp AB$$

Hơn nữa $AB = (SAB) \cap (ABCD)$.

$$(SAB) \perp (ABCD).$$

$SI \subset (SAB)$.

Từ đó suy ra $SI \perp (ABCD)$.

b) Vì $SI \perp (ABCD)$ nên $SI \perp AD$.

Mặt khác $AB \perp AD$.

Suy ra $AD \perp (SAB)$.

Bài 2: *Cho tứ diện ABCD có hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) cùng vuông góc với mặt phẳng (BCD).*

a) Chứng minh rằng $AB \perp mp(BCD)$.

b) Gọi O, H lần lượt là trực tâm của tam giác BCD và ACD.

Chứng minh $OH \perp mp(ACD)$.

Giải:

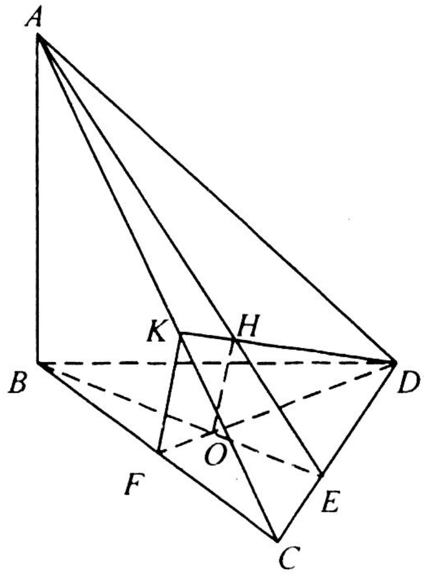
a) Ta có $(ABC) \perp (BCD)$.

$(ABD) \perp (BCD)$.

$(ABC) \cap (ABD) = AB$

Từ đó suy ra $AB \perp (BCD)$.

b) Vẽ các đường cao BE, DF của tam giác BCD, đường cao DK của tam giác ACD. Khi đó:



Ta có $CD \perp AB$ (vì $AB \perp (BCD)$).

$CD \perp BE$.

Suy ra $CD \perp (ABE)$.

Do đó $(ACD) \perp (ABE)$ (1)

$$\text{Mặt khác } \left.\begin{aligned} DF \perp BC \\ DF \perp AB \end{aligned}\right\} \Rightarrow DF \perp (ABC).$$

$$\left.\begin{aligned} \text{Suy ra } DF \perp AC \\ \text{Mà } DK \perp AC \end{aligned}\right\} \Rightarrow AC \perp (DFK).$$

Do đó $(ACD) \perp (DFK)$ (2)

Hơn nữa, $(ABE) \cap (DFK) = OH$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $OH \perp (ACD)$.

Dạng 4: Thiết diện tạo bởi mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng cho trước.

* *Phương pháp: Để xác định thiết diện của một hình khối tạo bởi mp (P) qua a và (P) vuông góc với một mặt phẳng (Q) cho trước ta thực hiện:*

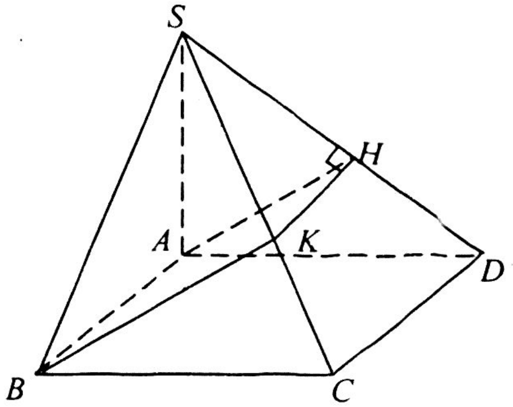
– Xác định mặt phẳng (P) bằng cách từ một điểm trên a dựng đường thẳng b vuông góc với (Q). Khi đó mặt phẳng (P) xác định bởi 2 đường thẳng cắt nhau a và b.

– Qui về cách tìm thiết diện ở các phần trước đã học.

Bài 1: *Cho hình chóp SABCD có ABCD là hình vuông cạnh bằng a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) với* $SA = a\sqrt{3}$. *Gọi α là mặt phẳng chứa AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD).*

a) Xác định mặt phẳng α. Mặt phẳng α cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì?

b) Tính diện tích thiết diện.



Giải:

a) * Dựng $AH \perp SD$.

Ta có $\left.\begin{matrix} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{matrix}\right\} \Rightarrow CD \perp (SAD)$.

Suy ra $CD \perp AH$.

Như vậy $AH \perp (SCD) \Rightarrow AH \subset \alpha$.

Do đó $\alpha = (AHB)$.

* Vì $\alpha // CD$ nên $\alpha \cap (SCD) = HK // CD$ $(K \in SC)$

Từ đó suy ra thiết diện là hình thang $ABKH$.

Hơn nữa $AB \perp (SAD)$ nên $AB \perp AH$.

Vậy thiết diện là hình thang vuông tại A và H.

b) Ta có $S_{ABKH} = \frac{1}{2}(AB + HK).AH$

Trong đó: $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = 2a$

$$S_{\Delta SAD} = AH.SD = SA.AD \Rightarrow AH = \frac{SA.AD}{SD} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$SA^2 = SH.SB \Rightarrow SH = \frac{SA^2}{SB} = \frac{3a}{2}$$

$$\frac{HK}{CD} = \frac{SH}{SD} \Rightarrow HK = \frac{CD.SH}{SD} = \frac{3a}{4}$$

Vậy $S_{ABKH} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{3a}{4}\right) \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{7a^2\sqrt{3}}{16}$.

Bài 2: *Cho tứ diện ABCD, có tam giác ABC vuông cân tại B, AB = a; DA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và* $DA = a\sqrt{3}$. *Gọi E là trung điểm của DC. M là điểm trên cạnh AB sao cho AM = x. Gọi α là mặt phẳng chứa EM và vuông góc với (DAB).*

a) Xác định mặt phẳng α. Mặt phẳng α cắt tứ diện theo thiết diện là hình gì?

b) Tính diện tích thiết diện.

Giải:

a) * Trong mặt phẳng (ABC) dựng $MN \perp AB$ $(N \in AC)$

Ta có, $MN \perp DA$ (vì $DA \perp (ABC)$).

Suy ra $MN \perp (DAB) \Rightarrow MN \subset \alpha$.

Do đó $\alpha = (MEN)$.

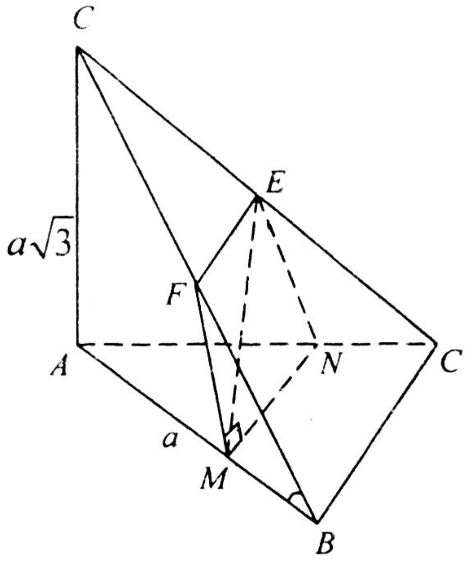
* Vì $CB \,//\, MN$ nên $CB \,//\, \alpha$.

Vậy $\alpha \cap (DBC) = EF \,//\, BC$ $(F \in DB)$

Khi đó, thiết diện là hình thang $MNEF$.

Mặt khác, $MN \perp MF$ (vì $MN \perp (DAB)$).

Suy ra $MNEF$ là hình thang vuông tại M, F.



b) $S_{MNEF} = \dfrac{1}{2}(MN + EF).FM$

Trong đó: $EF = \dfrac{a}{2}$

$\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{AM}{AB} \Rightarrow MN = AM = x$

$cos\widehat{ABD} = \dfrac{AB}{DB} = \dfrac{a}{\sqrt{DA^2 + AB^2}} = \dfrac{a}{\sqrt{3a^2 + a^2}} = \dfrac{1}{2}$

Suy ra $FM^2 = MB^2 + FB^2 - 2MB.FB\,cos\widehat{AMBF}$

$$= (a-x)^2 + a^2 - 2(a-x).a\,.\frac{1}{2}$$

$$= a^2 - ax + x^2$$

Vậy $FM = \sqrt{a^2 - ax + x^2}$

Do đó, $S_{MNEF} = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{2}\right).\sqrt{a^2 - ax + x^2} = \dfrac{1}{4}(2x + a).\sqrt{a^2 - ax + x^2}$.

C. BÀI TẬP:

Bài 1: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a; $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Tính góc giữa các mặt phẳng sau:

a) (SBC) và $(ABCD)$.

b) (SBC) và (SDC).

Bài 2: Cho ba tia Ox, Oy, Oz trong không gian sao cho $\widehat{xOy} = 120^\circ$; $\widehat{yOz} = 90^\circ$; $\widehat{zOx} = 60^\circ$. Trên Ox, Oy, Oz lần lượt lấy các điểm A, B, C sao cho: $OA = OB = OC = a$.

a) Xác định hình dạng của tam giác ABC và vị trí của chân đường vuông góc hạ từ O xuống (ABC).

b) Tính số đo các góc tạo bởi các mp(OBC) và mp(ABC); mp(OCA) và mp(ABC).

Bài 3: Cho hình vuông $ABCD$. Ax và Cy là các nửa đường thẳng cùng vuông góc với mp ($ABCD$) và ở cùng về một phía đối với mặt phẳng ấy. Lấy M, N lần lượt nằm trên Ax và Cy. Đặt $AM = x$; $CN = y$.

a) Góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và (NBD) là góc nào?

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa x, y để mp(MBD) $\perp$ mp(NBD).

Bài 4: Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi O, I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh BC; AB và AC. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại O lấy một điểm S (khác điểm O). Chứng minh rằng:

a) mp(SBC) $\perp$ mp(ABC). b) mp(SOI) $\perp$ mp(SAB). c) mp(SOI) $\perp$ mp(SOJ).

Bài 5: Cho hình chóp $SABCD$ có $ABCD$ là hình vuông, I là trung điểm cạnh AB.

$SI \perp$ mp($ABCD$).

a) Chứng minh rằng hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) cùng vuông góc với mặt phẳng (SAB).

b) Gọi J là trung điểm của cạnh BC, chứng minh rằng mp(SBD) $\perp$ mp(SIJ).

Bài 6: Cho hình chóp $SABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. $SA \perp$ mp($ABCD$).

a) Chứng minh mp(SAC) $\perp$ mp(SBD).

b) Tính số đo góc giữa 2 mặt phẳng (SAD) và (SCD).

c) Tính SA theo a để góc giữa 2 mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng 120°.

Bài 7: Cho hình chóp $SABCD$ có $SA \perp$ mp($ABCD$) và $SA = a\sqrt{2}$. Đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D với $AB = 2a$; $AD = DC = a$.

a) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

b) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC).

a) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

Bài 8: Cho lăng trụ $ABCA'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, $AA' \perp$ mp(ABC) và $AA' = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và (BCA').

Bài 9: Cho hình chóp $SABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. Đường cao của hình chóp là SO. Gọi I là trung điểm của CD, φ là góc hợp bởi SI và mp(BCD). ($\varphi > 45^\circ$). Gọi α là mặt phẳng qua AB và vuông góc với (SCD). Xác định và tính diện tích thiết diện của α và hình chóp theo a và φ.

Bài 10: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D; $AB = 2a$; $AD = DC = a$. Hai mặt phẳng (SAB), (SAD) cùng vuông góc với đáy; $SA = a$. Gọi E là trung điểm của SA, M là điểm trên cạnh AD sao cho $AM = x$. Gọi α là mặt phẳng chứa EM và vuông góc với (SAD).

a) Chứng minh $SA \perp$ ($ABCD$).

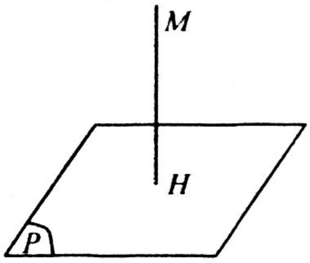
b) Xác định mặt phẳng α.

c) Mặt phẳng α cắt hình chóp $SABCD$ theo thiết diện là hình gì? Tính diện tích thiết diện.

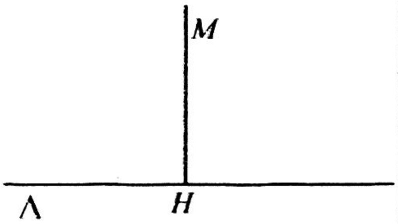
§5: KHOẢNG CÁCH

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. *Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng, đến một **đường** thẳng*:

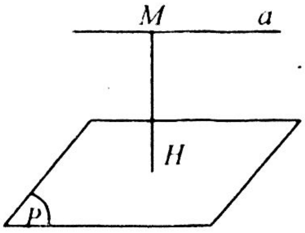


* $d(M; (P)) = MH$ với H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (P).

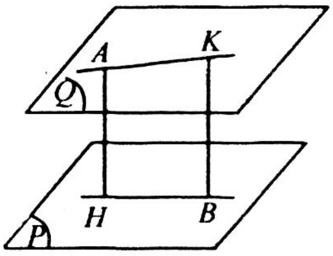


* $d(M; \Delta) = MH$ với H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng Δ.

2. *Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song, **giữa hai mặt phẳng** song song.*

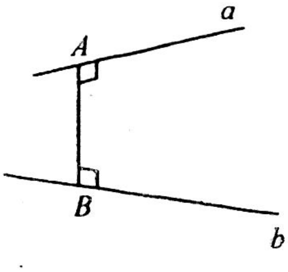


* $d(a; (P)) = d(M, (P))$
với $M \in a$; $a // (P)$



* $d((P); (Q)) = d(A; (P)) = d(B; (Q))$
với $A \in (Q)$; $B \in (P)$; $(P) // (Q)$

3. *Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.*



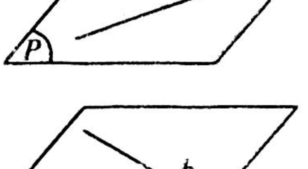
* $d(a, b) = AB$ (a và b chéo nhau)

Trong đó $AB \perp a$ tại A; $AB \perp b$ tại B.

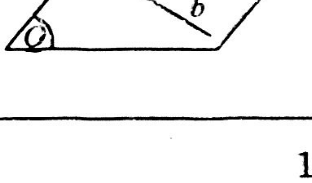
- Đường thẳng AB: được gọi là đường vuông góc chung của 2 đường thẳng chéo nhau a và b.
- Đoạn thẳng AB gọi là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau đó.

Nhận xét:

+ $d(a, b) = d(a; (Q)) = d(b; (P))$.
Với $b \subset (Q)$ và $a // (Q)$; $a \subset (P)$ và $b // (P)$.



+ $d(a, b) = d((P); (Q)) = d(b; (P))$
Với $a \subset (P)$; $b \subset (Q)$ và $(P) // (R)$



B. CÁC DẠNG TOÁN:

***Dạng 1*: Xác định khoảng cách từ điểm đến một mặt phẳng**

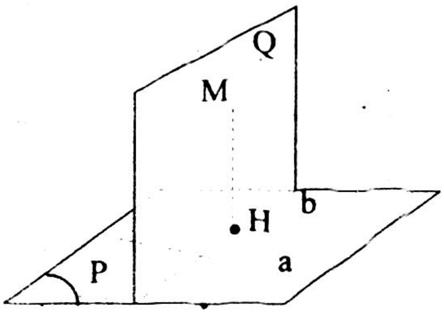
** Phương pháp:*

- *Để tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) ta thực hiện:*

– Chọn trong mặt phẳng (P) một đường thẳng a, rồi dựng mặt phẳng (Q) qua M và (Q) $\perp$ a.

– Xác định giao tuyến b của (P) và (Q).

– Dựng MH $\perp$ b tại H thì đường thẳng MH qua M và MH $\perp$ (P). Khi đó d(M, (P)) = MH.



- *Lưu ý:*

– Trước khi thực hiện chọn a và dựng mặt phẳng (Q) ta xem xét đường thẳng a và mặt phẳng (Q) đã có sẵn trong hình vẽ chưa.

– Nếu có thẳng đường thẳng c $\perp$ (P) thì chỉ việc dựng đường thẳng Δ qua M; Δ // c và Δ cắt (P) tại H khi đó d(M, (P)) = MH.

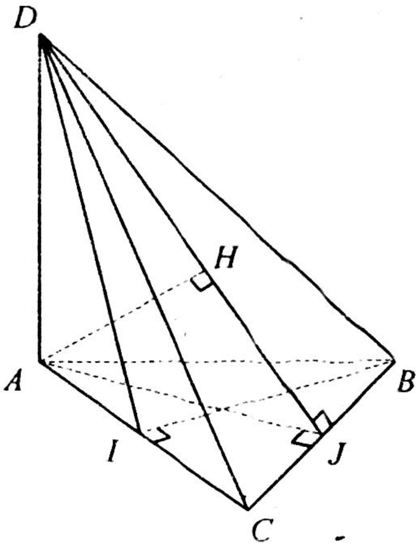
– Các bài tính xác định khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song, giữa hai mặt phẳng song song đều qui về việc tính khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng.

Bài 1: *Cho tứ diện ABCD có DA $\perp$ (ABC) và tam giác ABC đều cạnh a.*

a. *Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (ACD).*

b. *Nếu AD = b. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD).*

Giải:



a. Gọi I là trung điểm của AC.

Ta có: $BI \perp AC$

$BI \perp DA$ (vì $DA \perp (ABC)$)

Suy ra $BI \perp (ACD)$

Do đó $d(B; (ACD)) = BI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

b. Gọi J là trung điểm của BC.

Ta có: $BC \perp AJ$

$BC \perp DA$ (vì $DA \perp (ABC)$)

Suy ra $BC \perp (ADJ)$

Mặt khác, $(ADJ) \cap (BCD) = SJ$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Dựng } AH \perp DJ \\ \text{Suy ra } AH \perp BC\end{array}\right\} \Rightarrow AH \perp (BCD).$$

Vậy $d(A, (BCD)) = AH$.

Ta có tam giác DAJ vuông tại A.

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AJ^2}+\frac{1}{AD^2}=\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{4}{3a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{4b^2+3a^2}{3a^2b^2}$$

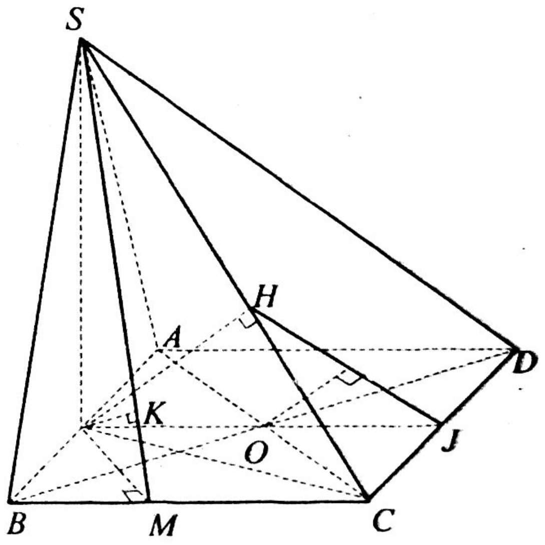
$$\Rightarrow AH=\frac{ab\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2+4b^2}}$$

Như vậy, $d(A,(BCD))=\dfrac{ab\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2+4b^2}}$.

Bài 2: *Cho hình thoi ABCD tâm O cạnh bằng a và AC = a. Từ trung điểm I của cạnh AB dựng SI ⊥ mp (ABCD) và SI = a.*

a) Tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SCD). Từ đó suy ra khoảng cách từ O đến (SCD).

b) Tính khoảng cách từ A đến (SBC).



Giải:

a) Vì tam giác ABC đều nên $CI\perp AB$.

Mà $CD /\!/ AB$, do đó $CI\perp CD$.

Mặt khác $SI\perp(ABCD)$ nên $SI\perp CD$.

Suy ra $CD\perp(SCI)$.

Dựng $IH\perp SC$ trong mặt phẳng (SCI)

Ta có $IH\perp CD$.

Do đó $IH\perp(SCD)$

Trong tam giác SIC vuông tại I ta có:

$$\frac{1}{IH^2}=\frac{1}{SI^2}+\frac{1}{IC^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{a^2}+\frac{4}{3a^2}=\frac{7}{3a^2}$$

$$\Rightarrow IH=\frac{a\sqrt{21}}{7}$$

Vậy, $d(I;(SCD))=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$

Gọi J là trung điểm của CD

Ta có: $\dfrac{d\left(O;(SCD)\right)}{d\left(I;(SCD)\right)}=\dfrac{OJ}{IJ}=\dfrac{1}{2}$

Suy ra $d(O;(SCD) = \frac{1}{2}d\left(I;(SCD)\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{21}}{7} = \frac{a\sqrt{21}}{14}$.

b) Dựng IM vuông góc BC tại M; IK vuông góc với SM tại K.

Ta có $\left.\begin{matrix} BC \perp IM \\ BC \perp SI \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SIM)$

$\left.\begin{matrix} \text{Suy ra} & BC \perp IK \\ \text{Mặt khác} & SM \perp IK \end{matrix}\right\} \Rightarrow IK \perp (SBC)$.

Vậy $d(I, (SBC)) = IK$.

Ta có $IM = BI \cdot \sin 60^\circ = \frac{a}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

$$\frac{1}{IK^2} = \frac{1}{IS^2} + \frac{1}{IM^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{16}{3a^2} = \frac{19}{3a^2}$$

$$\Rightarrow IK = \frac{a\sqrt{57}}{19}$$

Vì AI cắt (SBC) tại B nên: $\frac{d\left(I,(SBC)\right)}{d\left(A,(SBC)\right)} = \frac{BI}{BA} = \frac{1}{2}$

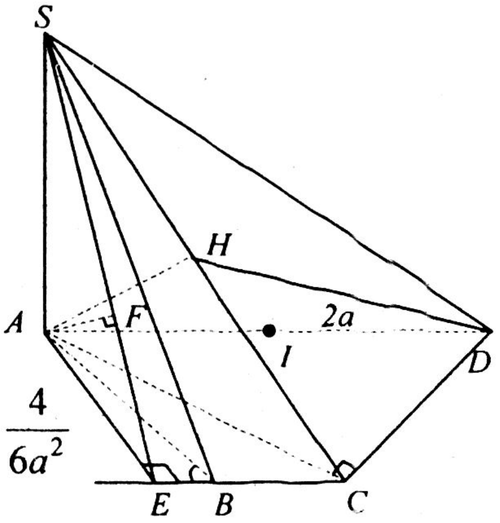
$$\Rightarrow d\left(A,(SBC)\right) = 2d\left(I;(SBC)\right) = \frac{2\cdot a\sqrt{57}}{19}$$

Bài 3: Cho hình chóp $SABCD$ có SA vuông góc mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$. Đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AD = 2a$.

a) Tính khoảng cách từ A và B đến mặt phẳng (SCD).

b) Tính khoảng cách từ đường thẳng AD đến mặt phẳng (SBC).

Giải:



a) * Vì $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AD = 2a$ nên ta có

$\left.\begin{matrix} & AC \perp CD \\ \text{Mặt khác} & SA \perp CD \end{matrix}\right\} \Rightarrow CD \perp (SAC)$

Dựng $AH \perp SC$ tại H

Suy ra $AH \perp (SCD)$ (vì $AH \perp SC$; $AH \perp CD$)

Vậy $d(A, (SCD)) = AH$.

Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{6a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{6a^2}$

Suy ra $AH^2 = \frac{3a^2}{2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

* Gọi I là trung điểm của AD.

Ta có $BI \,//\, CD \Rightarrow BI \,//\, (SCD)$.

Vậy $d(B, (SCD)) = d(I, (SCD)) = \frac{1}{2} d(A, (SCD)) = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

b) Ta có $AD \parallel BC \Rightarrow AD \parallel (SBC)$

Vậy $d(AD; (SBC)) = d(A, (SBC))$

Dựng $AE \perp BC$ tại E ; $AF \perp SE$ tại F.

Ta có $\left.\begin{matrix} AE \perp BC \\ SA \perp BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAE)$

$$\left.\begin{matrix} \text{Suy ra} & BC \perp AF \\ \text{Mặt khác} & SE \perp AF \end{matrix}\right\} \Rightarrow AF \perp (SBC)$$

Vậy $d(A; (SBC)) = AF$

Ta có $AE = AB.sin60^{\circ} = a.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

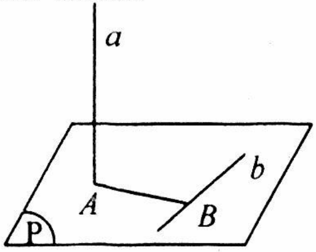
Do đó $\frac{1}{AF^2} = \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{6a^2} = \frac{3}{2a^2}$

Suy ra $AF = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Vậy $d(DA; (SBC)) = d(A; (SBC)) = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Dạng 2: ***Xác định khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau.***

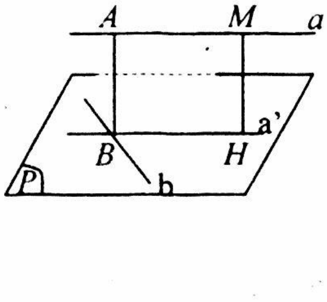
** Phương pháp. Để xác định khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau a và b ta thực hiện:*



Cách 1: (áp dụng cho trường hợp $a \perp b$)

- Dựng mặt phẳng (P) chứa b và (P) $\perp$ a tại A.

- Dựng AB $\perp$ b tại B khi đó d(a, b) = AB.



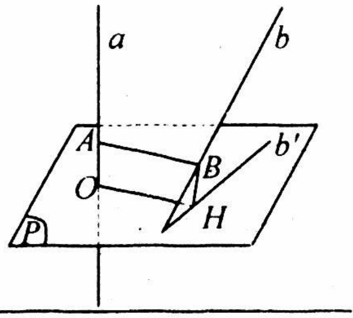
Cách 2:

- Dựng mặt phẳng (P) chứa b và (P) // a.

- Chọn M trên a, dựng MH $\perp$ (P) tại H

- Từ H, dựng a' // a, cắt b tại B.

- Từ B, dựng đường thẳng song song với MH cắt a tại A khi đó d(a, b) = AB.



Cách 3:

- Dựng mặt phẳng (P) vuông góc với a tại O.

- Dựng hình chiếu b' của b trên (P).

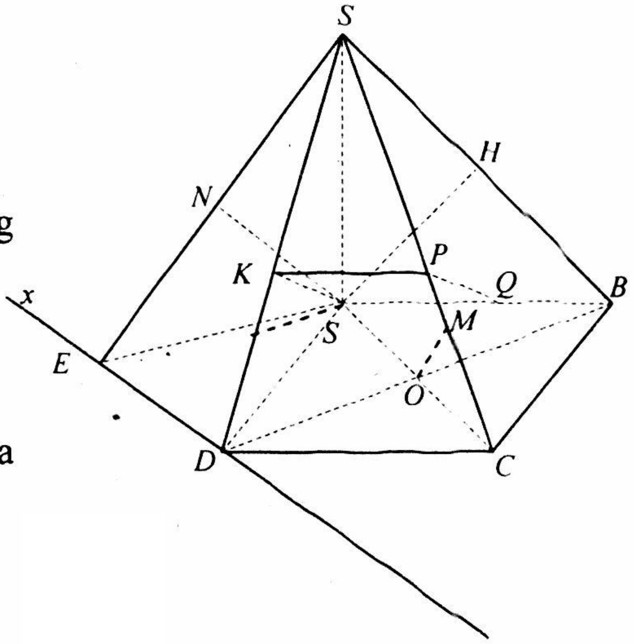
- Dựng hình chiếu vuông góc H của O trên b'.

– Từ H dựng đường thẳng song song với a cắt b tại B.
– Từ B dựng đường thẳng song song với OH cắt a tại A
Khi đó d(a, b) = AB.

Bài 1: *Cho hình chóp SABCD có ABCD hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và SA = a. Xác định đoạn vuông góc chung và tính khoảng cách giữa các cặp đường thẳng sau.*

a) SB và CD *b) SA và BD*
c) SB và AD *d) SC và BD*
e) AB và SC *f) AC và SD*

Giải:



a) Ta có $\left.\begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

Suy ra $BC \perp SB$

Mặt khác $BC \perp DC$

Do đó BC là đoạn vuông góc chung của SB và CD

Vậy $d(SB; CD) = BC = a$.

b) Ta có $AO \perp SA$ vì $SA \perp (ABCD)$

$AO \perp BD$

Vậy AO là đoạn vuông góc chung của SA, BD.

Suy ra $d(SA; BD) = AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

c) Ta có $\left.\begin{array}{l} AD \perp SA \\ AD \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow AD \perp (SAB)$

Suy ra $AD \perp SB$

Trong mặt phẳng (SAB), từ A dựng $AH \perp SB$, khi đó AH là đoạn vuông góc chung của SB và AD. $d(SB; AD) = AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

d) Ta có $\left.\begin{array}{l} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow OM \perp BD$.

Dựng trong mặt phẳng (SAC): $OM \perp SC$

Suy ra OM là đoạn vuông góc chung của SC và BD.

Vậy $d(SC; BD) = OM$

$$\text{Ta có } \frac{OM}{SA} = \frac{OC}{SC} \Rightarrow OM = \frac{SA.OC}{SC} = \frac{a.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

e) Ta có $\left.\begin{array}{l} AB \perp AD \\ AB \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow AD \perp (SAD)$

Mặt khác, SD là hình chiếu của SC trên mặt phẳng(SAD).
Dựng AK $\perp$ SD (K $\in$ SD), KP // AB (P $\in$ SC); PQ // AK (Q $\in$ AB).
Khi đó PQ là đoạn vuông góc chung của AB và SC

$$d(AB; SC) = PQ = AK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

f) Dựng $Dx \parallel AC$. Khi đó $AC \parallel (S, Dx)$
Dựng $AE \perp Dx$ $(E \in Dx)$; $AN \perp DE$ $(N \in SE)$
NR // DE (R $\in$ SD); RS // NA (S $\in$ AC)

Khi đó $\left.\begin{array}{l} DE \perp EA \\ DE \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow DE \perp (SAE)$

Suy ra $\left.\begin{array}{l} DE \perp NA \\ \text{Mặt khác } SE \perp NA \end{array}\right\} \Rightarrow NA \perp (SDE)$

Mà $RS \parallel NA \Rightarrow RS \perp (SDE) \Rightarrow RS \perp SD$
Hơn nữa, $AC \perp (SAE) \Rightarrow AC \perp NA \Rightarrow AC \perp RS.$
Vậy RS là đoạn vuông góc chung của AC và SD.

$$d(AC; SD) = RS = NA$$

$$\frac{1}{NA^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{EA^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{3}{a^2}$$

$$\Rightarrow NA = \frac{a\sqrt{3}}{3} \quad Hay\ d(AC;SD) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Nhận xét: Nếu bài toán chỉ yêu cầu tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau thì ta có thể không cần xác định đoạn vuông góc chung của 2 đường thẳng đó mà qui về tính khoảng cách từ 1 đường thẳng đến mặt phẳng song song với nó và chứa đường thẳng còn lại.
Chẳng hạn, Bài 17 ta có thể tính như sau.
Dựng Dx // AC khi đó AC // (S, Dx); d(AC; SD) = d(A; (S, Dx)).
Dựng AE $\perp$ Dx (E $\in$ Dx); AN $\perp$ DE (N $\in$ SE)

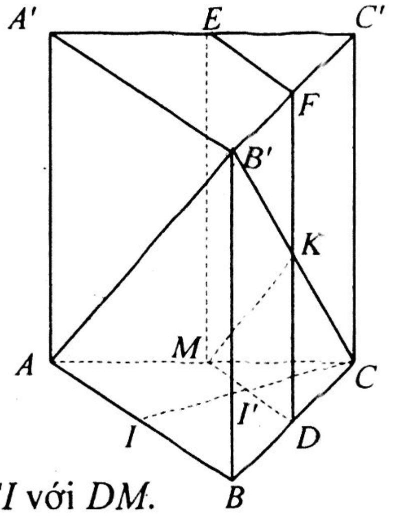
Suy ra $DE \perp (SAE) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} DE \perp NA \\ SE \perp NA \end{array}\right\} \Rightarrow NA \perp (S, Dx)$

Vậy $d(AC; BD) = NA = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Bài 2: *Cho lăng trụ ABC. A'B'C' có các mặt bên đều là hình vuông cạnh a. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC; A'C'; C'B'. Tính khoảng cách giữa các cặp đường thẳng:*
a) DE và AB'.

b) $A'B$ và $B'C'$.

c) DE và $A'F$.



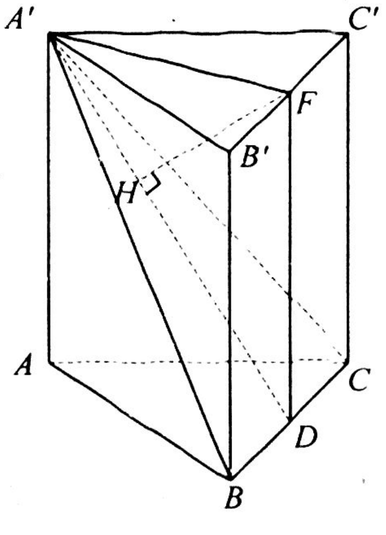
Giải:

a) Gọi K là giao điểm của $B'C$ và FD.
Suy ra K là trung điểm của $B'C$ và FD.
M là trung điểm của AC. Khi đó $MK // AB'$
Do đó $AB' // (EFDM)$
Vậy $d(DE, AB') = d(AB', (EFDM))$
$= d(A; (EFDM)) = d(C ; (EFDM))$
(Vì M là trung điểm của AC và M là giao điểm của AC với mặt phẳng $(EFDM)$)
Gọi I là trung điểm của AB, I' là giao điểm của CI với DM.
Ta có $CI' \perp DM$ (vì ABC là tam giác đều và $CI \perp AB$, $AB // DM$)
$CI' \perp DF$ (vì $DF \perp (ABC)$).

Suy ra $CI' \perp (EFDM)$ hay $d(C, (EFDM)) = CI' = \frac{CI}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

b) Ta có $B'C' // BC$
Suy ra $B'C' // (A'BC)$
Vậy $d(AB'; B'C') = d(B'C'; (A'BC)) = d(F; (A'BC))$

Hơn nữa $\left.\begin{matrix} B'C' \perp FD \\ B'C' \perp A'F \end{matrix}\right\} \Rightarrow B'C' \perp (A'DF)$

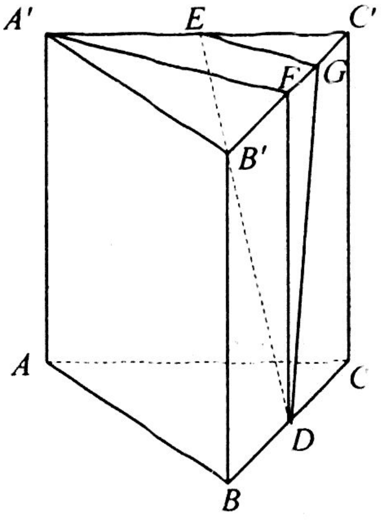


Suy ra $BC \perp (A'DF)$ vì $BC // B'C'$.
Dựng $FH \perp A'D$ trong mặt phẳng $(A'DF)$
Khi đó $FH \perp BC$ (vì $BC \perp (A'DF)$)
Vậy $FH \perp (A'BC)$. Do đó $d(F, (A'BC)) = FH$.

$$\frac{1}{FH^2} = \frac{1}{A'F^2} + \frac{1}{FD^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)} + \frac{1}{a^2}$$

$$= \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3a^2}$$

$$\Rightarrow FH = \frac{a\sqrt{21}}{7}$$



c) Gọi G là trung điểm của FC'
Ta có $EG // A'F$
Suy ra $A'F // (DEG)$
Vậy $d(DE; A'F) = d(A'F, (DEG))$
$= d(F; (DEG))$.

Ta có $\left.\begin{matrix} EG \perp B'C' \\ EG \perp C'C \end{matrix}\right\} \Rightarrow EG \perp (BCC'B')$

Dựng $FN \perp GD$ trong mp$(BCC'B')$

Suy ra $FN \perp EG$ (vì $EG \perp (BCC'B')$)

Do đó $FN \perp (DEG)$ hay $d(F; (DEG)) = FN$.

$$\frac{1}{FN^2}=\frac{1}{FD^2}+\frac{1}{FG^2}=\frac{1}{a^2}+\dfrac{\frac{3}{a^2}}{FG}=\frac{17}{a^2}$$

$$\Rightarrow FN=\frac{a\sqrt{17}}{17}$$

Vậy $d(DE; A'F) = \dfrac{a\sqrt{17}}{17}$.

C. BÀI TẬP:

Bài 1: Cho tứ diện $ABCD$ có BCD là tam giác đều cạnh a; AB vuông góc với mặt phẳng (BCD) và $AB = a$. Tính khoảng cách:

a) Từ D đến mặt phẳng (ABC).

b) Từ B đến mặt phẳng (ACD).

Bài 2: Cho hình chóp $SABCD$, đáy là hình vuông cạnh bằng a, mặt bên SAB vuông góc với đáy và $SA = SB = b$. Tính các khoảng cách:

a) Từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Từ trung điểm I của CD đến mặt phẳng (SHC), H là trung điểm của AB.

c) Từ AD đến mặt phẳng (SBC).

Bài 3: Cho 2 tia chéo nhau Ax, By hợp với nhau một góc 60°, nhận $AB = a$ làm đoạn vuông góc chung. Trên By lấy điểm C với $BC = a$. Gọi D là hình chiếu vuông góc của C trên Ax.

a) Tính AD và khoảng cách từ C đến mặt phẳng (ABD).

b) Tính khoảng cách giữa AC và BD.

Bài 4: Cho $SABC$ là một tứ diện có ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = 2a$. SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = a$.

a) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

b) Gọi O là trung điểm AC. Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC).

Bài 5: Cho hình lăng trụ $ABC\,A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. AA' vuông góc với mặt phẳng (ABC). Đường chéo BC' của mặt bên $BCC'B'$ hợp với $(ABB'A')$ một góc 30°.

a) Tính AA'.

b) Tính khoảng cách từ trung điểm M của AC đến mặt phẳng $(BA'C')$.

Bài 6: Cho tứ diện $OABC$ có OA; OB; OC đôi một vuông góc với nhau.

$OA = OB = OC = a$. Gọi I là trung điểm của BC. Dựng và tính độ dài vuông góc chung của:

a) OA và BC. b) AI và OC.

Bài 7: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$. SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$.

a) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD). Suy ra khoảng cách từ trung điểm I của cạnh SC đến mặt phẳng (SBD).

b) M là trung điểm của CD, tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBM).

Bài 8: Cho hình lăng trụ $ABC\,A'B'C'$ có AA' vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $AA' = a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A và có $BC = 2a$, $AB = a\sqrt{3}$.

a) Tính khoảng cách từ AA' đến mặt phẳng $(BCC'B')$.

b) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$.

c) Chứng minh rằng AB vuông góc với mặt phẳng $(ACC'A')$ và tính khoảng cách từ A' đến mặt phẳng (ABC').

Bài 9: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B. $AB = BC = a$; $AD = 3a$; $CD = a\sqrt{7}$ và $SA \perp$ mp $(ABCD)$; $SA = a\sqrt{2}$. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng.

a) SA và CD. b) AB và SD. c) AD và SC.

Bài 10: Cho hình lăng trụ $ABCA'B'C'$ có đáy là tam giác đều, $AA' = h$ và $AA' \perp$ mp (ABC). Biết khoảng cách giữa $A'B'$ và BC' là d. Tính cạnh đáy của lăng trụ theo d và h.

ÔN TẬP CHƯƠNG III

Bài 1: Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh đều bằng a. H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (BCD), O là trung điểm của AH.

a) Chứng minh $AB \perp CD$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD theo a.

b) Chứng minh OB, OC, OD từng đôi một vuông góc với nhau.

c) Xác định điểm M trong không gian sao cho:

$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị bé nhất.

Bài 2: Cho tam diện ba góc vuông $Oxyz$. Trên Ox, Oy, Oz lần lượt lấy các điểm A, B, C sao cho $OA = a$; $OB = b$, $OC = c$. Gọi AM, BN là các đường cao của tam giác ABC; H là trực tâm tam giác ABC. Gọi α, β, γ lần lượt là số đo của góc nhị diện cạnh BC, CA và AB. Chứng minh rằng:

a) Mặt phẳng (AMO) ; (BNO) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC).

b) OH vuông góc với mặt phẳng (ABC)

c) $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$

d) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

e) $S^2_{ABC} = S^2_{OAB} + S^2_{OBC} + S^2_{OCA}$.

Bài 3: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh bằng a, $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO = \dfrac{3a}{4}$. Gọi E là trung điểm của BC, F là trung điểm của BE.

a) Chứng minh rằng mp$(SOF) \perp (SBC)$.

b) Tính khoảng cách từ O và A đến mặt phẳng (SBC).

c) Tính khoảng cách giữa AD và SB.

d) Tính góc giữa 2 mặt phẳng (SBC) và (SAD).

e) Gọi α là mặt phẳng qua AD và vuông góc với mặt phẳng (SBC). Xác định thiết diện của hình chóp với α. Tính diện tích thiết diện này.

Bài 4: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a và một tam giác đều SAB nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau, I là trung điểm của AB, M là điểm trên đoạn AB sao cho $AM = x$.

a) Chứng minh rằng $SI \perp (ABCD)$.

b) Chứng minh rằng các tam giác SAD và SBC là tam giác vuông.

c) Chứng minh rằng mặt phẳng (SAD) và (SBC) đều vuông góc với mặt phẳng (SAB). Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

d) Dựng MN, MQ lần lượt song song với SB; BC ($N \in SA$; $Q \in CD$). Mặt phẳng (MNQ) cắt SD tại P. Chứng minh rằng $MNPQ$ là hình thang vuông. Tính S_{MNPQ} theo a và x. Định x để diện tích đạt giá trị lớn nhất. Tính diện tích đó.

Bài 5: Cho hình chóp $SABCD$ có ABCD là hình vuông cạnh bằng a tâm O và $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2}$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC.

a) Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$. b) Chứng minh rằng $(SIJ) \perp (SBC)$.

c) Tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SBC).

d) Tính góc giữa cạnh bên và mặt đáy, giữa mặt bên và mặt đáy.

e) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB.

f) Mặt phẳng α chứa SI và $\alpha \perp BC$ cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì? Tính diện tích thiết diện.

PHẦN BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài 1. Cho tứ diện ABCD có trọng tâm G. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{OD}=\vec{O}$ B. $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$

C. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$ D. $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

Bài 2. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

B. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường kia.

C. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

D. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì song song với đường thẳng còn lại.

Bài 3. Mệnh đề nào sau đây là đúng.

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

B. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì một đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Bài 4. Cho tứ diện ABCD. M là trung điểm của BD. G là trọng tâm tam giác ACD. Biểu thị $\overrightarrow{MN}$ theo các véc tơ $\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC};\ \overrightarrow{BD}$.

A. $\overrightarrow{MG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{5}{6}\overrightarrow{BD}$ B. $\overrightarrow{MG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}-\frac{5}{6}\overrightarrow{BD}$

C. $\overrightarrow{MG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{6}\overrightarrow{BD}$ D. $\overrightarrow{MG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}-\frac{5}{6}\overrightarrow{BD}$.

Bài 5. Cho hình hộp ABCD. A'B'C'D'. E, F lần lượt là trung điểm của BB' và A'D'. Biểu thị $\overrightarrow{EF}$ theo các véc tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA'}$.

A. $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$ B. $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$

C. $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$ D. $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}AA' - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$.

Bài 6. Cho lăng trụ ABCA'B'C'. Hai đường chéo của mặt BB'C'C cắt nhau tại M. Biểu thị $\overrightarrow{AM}$ theo ba véc tơ $\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{BC}$ *và* $\overrightarrow{BB'}$.

A. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}$ B.

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}$

C. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BB'}$ D.

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{BA}$.

Bài 7. Cho hình chóp SABCD, có đáy là hình vuông cạnh bằng a, mặt bên SAB là tamgiác đều. SCD là tam giác vuông tại đỉnh S. Gọi I, J là trung điểm của AB và CD. H là hình chiếu vuông góc của S trên IJ. Tính độ dài SH.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{8}$; *B.* $\frac{a\sqrt{3}}{6}$; *C.* $\frac{a\sqrt{3}}{4}$; *D.* $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Bài 8. Cho hình chóp tứ giác đều SABCD cạnh đáy bằng a. M, N là trung điểm của SA và BC. Góc giữa MN với mặt phẳng (ABCD) bằng 60^0. Tính MN.

A. $\frac{a\sqrt{10}}{4}$; *B.* $\frac{a\sqrt{10}}{3}$; *C.* $\frac{a\sqrt{10}}{5}$; *D.* $\frac{a\sqrt{10}}{2}$.

Bài 9. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, có cạnh AD = $a\sqrt{3}$. SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và SA = a. Tính góc α giữa 2 mặt phẳng (SCD) và (ABCD).

A.30^0 ; *B*. 45^0 ; *C*. 60^0 ; *D*. *arccos* $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Bài 10. Cho tam giác ABC là tam giác vuông tại A, AB = a; BC = 2a. Trên AC lấy điểm H sao cho CH = $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại H lấy điểm S sao cho tam giác SCA vuông tại S. Tính tan của góc α giữa SB và mặt phẳng (ABC).

$A.\ \tan\alpha = \frac{\sqrt{2}}{7}$; $B.\ \tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{7}$; $C.\ \tan\alpha = \frac{\sqrt{14}}{7}$; $D.\ \tan\alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

Bài 11. Cho hình hộp ABCD A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi cạnh bằng a, tâm O và góc $\widehat{BAO} = 60^0$. Biết rằng B'O vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và BB' = a. Tính góc giữa cạnh bên BB' và đáy.

A. 30^0 ; B. 45^0 ; C. 60^0 ; D. 75^0.

Bài 12. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AD = 2a, AB = a; SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và SA = 2a. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) là:

$A.\ \frac{a\sqrt{2}}{3}$; $B.\ \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $C.\ a\sqrt{\frac{3}{2}}$ $D.\ a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Bài 13. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và SA = $a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (SCD).

$A.\ \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $B.\ \frac{a\sqrt{3}}{4}$; $C.\ \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $D.\ \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Bài 14. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B. AB = BC = a; AD = 2a; SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và SA = a.

a. Tính khoảng cách giữa AD và SB.

$A.\ \frac{a}{\sqrt{2}}$; $B.\ \frac{a}{2}$; $C.\ \frac{a}{\sqrt{3}}$; $D.\ \frac{a}{2\sqrt{2}}$.

b. Gọi M là điểm trên AB sao cho AM = x. N là trung điểm của SA. Mặt phẳng α chứa MN và vuông góc với mặt phẳng (SAB). Tính diện tích của thiết diện của hình chóp tạo bởi mặt phẳng α.

$A.\ \frac{1}{4}(3a - x)\sqrt{4a^2 + x^2}$ $B.\ \frac{1}{4}(3a - x)\sqrt{a^2 + 4x^2}$

$C.\ \frac{1}{4}(3a + x)\sqrt{a^2 + 4x^2}$ $D.\ \frac{1}{4}(x - 3a)\sqrt{a^2 + 4x^2}$.

Bài 15. Cho lăng trụ tứ giác đều ABCDA'B'C'D' có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng b. Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (BDC').

$A.\ \frac{ab}{\sqrt{2b^2 + a^2}}$; $B.\ \frac{ab}{\sqrt{2a^2 + b^2}}$; $C.\ \frac{ab}{\sqrt{3a^2 + b^2}}$; $D.\ \frac{ab}{\sqrt{3b^2 + a^2}}$.

Bài 16. Cho hình vuông ABCD và tam giác đều SAD nằm trong 2 mặt phẳng vuông góc và AD = a. Tính khoảng cách giữa AD và SB.

$A.\ \dfrac{a\sqrt{15}}{3}$; $B.\ \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$; $C.\ \dfrac{a\sqrt{21}}{3}$; $D.\ \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Bài 17. Cho lăng trụ đứng ABCA'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại A; AB = a; AC = b; AA' = c. Tính khoảng cách giữa A'B' và AC'.

$A.\ \dfrac{bc}{\sqrt{2a^2+c^2}}$; $B.\ \dfrac{ac}{\sqrt{2a^2+b^2}}$; $C.\ \dfrac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$; $D.\ \dfrac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}}$.

Bài 18. Cho tam giác ACD và BCD nằm trong 2 mặt phẳng vuông góc với nhau. BC = AC = AD = BD = a và CD = 2x. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AB và CD.

a. Tính IJ theo a và x.

$A.\ \dfrac{\sqrt{2(a^2-x^2)}}{2}$; $B.\ \dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{2}$; $C.\ \dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{4}$; $D.\ \dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{8}$.

b. Xác định x để mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (ABD).

$A.\ x=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $B.\ x=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$; $C.\ x=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$; $D.\ x=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Bài 19. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O. SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và SA = a.

a. Tính góc giữa mặtphẳng (SBC) và (SDC).

A. 120^0 B. 60^0 C. 90^0 D. 45^0.

b. Gọi α là mặt phẳng qua O và trung điểm M của SD đồng thời vuông góc với (ABCD). Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng α.

$A.\ \dfrac{a^2}{4}$; $B.\ \dfrac{3a^2}{4}$; $C.\ \dfrac{3a^2}{8}$; $D.\ \dfrac{a^2}{2}$.

Bài 20. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

a. Tính khoảng cách giữa SB và CD

$A.\ a\sqrt{2}$; $B.\ a$; $C.\ \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $D.\ \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

b. β là mặt phẳng qua A và trung điểm E của CD đồng thời vuông góc với mặt phẳng (SBC). Tính diện tích thiết diện của hình chóp tạo bởi mặt phẳng β.

$A.\ \dfrac{a^2}{2}$; $B.\ \dfrac{a^2}{4}$; $C.\ \dfrac{a^2}{8}$; $D.\ \dfrac{a^2}{16}$

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

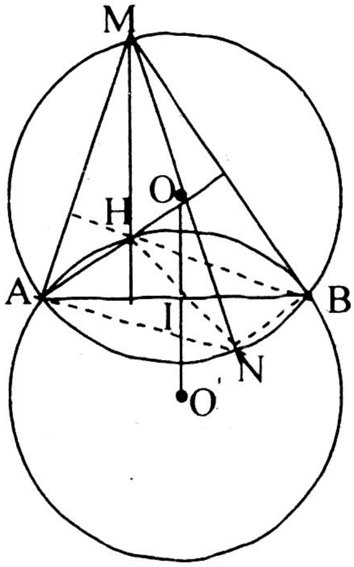
CHƯƠNG 1: PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP VỊ TỰ TRONG MẶT PHẲNG

§1. PHÉP BIẾN HÌNH – PHÉP TỊNH TIẾN – PHÉP DỜI HÌNH

Bài 1. Ta có: $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{v}+\vec{u}}$ nên:

$$T_{\overrightarrow{AC}} \circ T_{\overrightarrow{BA}} \circ T_{\overrightarrow{CB}} = (T_{\overrightarrow{AC}} \circ T_{\overrightarrow{BA}}) \circ T_{\overrightarrow{CB}} = T_{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}} \circ T_{\overrightarrow{CB}} = T_{\overrightarrow{BC}} \circ T_{\overrightarrow{CB}} = T_{\vec{0}} = id$$

Bài 2. Gọi N là điểm đối xứng với M qua O, ta có: tứ giác AHBN là hình bình hành $\Rightarrow$I là trung điểm của AB và HN.

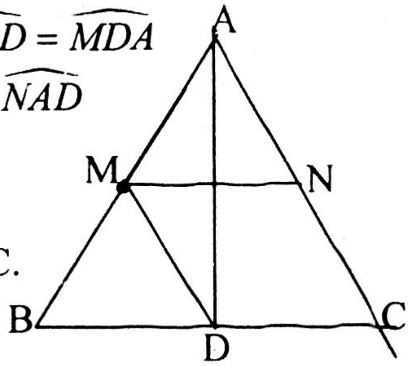


Trong ΔHMN, OI là đường trung bình của tam giác $\Rightarrow \overrightarrow{MH} = 2\overrightarrow{OI} \Rightarrow T_{2\overrightarrow{OI}}$: M $\rightarrow$ H.

Quỹ tích của H là đường tròn (O'), ảnh của đường tròn (O) qua phép tịnh tiến $T_{2\overrightarrow{OI}}$.

Bài 3. Tương tự cách giải bài 2.

Bài 4. Phân tích: Giả sử dựng được điểm M trên cạnh AB và điểm N trên cạnh AC sao cho MN // BC và AM = CN. Ta vẽ MD // AC $\Rightarrow$ tứ giác MNCD là hình bình hành.



$\Rightarrow$ MD = CN = AM $\Rightarrow$ ΔMAD cân tại M $\Rightarrow \widehat{MAD} = \widehat{MDA}$

Mặt khác: $\widehat{MDA} = \widehat{NAD}$ (sole trong) $\Rightarrow \widehat{MAD} = \widehat{NAD}$

$\Rightarrow$ AD là phân giác góc $\widehat{BAC}$.

Cách dựng:

– Dựng phân giác AD của góc $\widehat{BAC}$ với D $\in$ BC.

– Dựng đường thẳng đi qua D, song song AC, cắt AB tại M

– Dựng N là ảnh của M qua phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{DC}}$.

Chứng minh: Theo cách dựng thì M thuộc cạnh AB và N thuộc cạnh AC.

Tứ giác MNCD là hình bình hành $\Rightarrow$ MD = NC và MN // BC

$\widehat{MAD} = \widehat{NAD}$ và $\widehat{MAD} = \widehat{NAD} \Rightarrow \widehat{MAD} = \widehat{MDA}$

$\Rightarrow\Delta$MAD cân tại M

$\Rightarrow$ MD = AM $\Rightarrow$AM = CN.

Biện luận: Bài toán luôn có một nghiệm hình.

Bài 5.

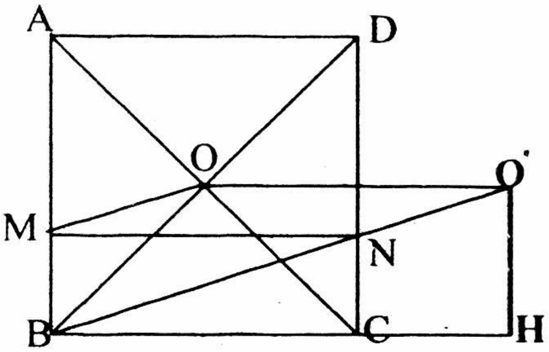
Phân tích: Giả sử dựng được điểm M trên cạnh AB, điểm N trên cạnh Dc sao cho OM + MN + NB ngắn nhất.

Xét $T_{\overrightarrow{BC}} : O \to O' \Rightarrow OO' = MN$,

$MO = O'N$

$OM + MN + NB = OO' + O'N + NB \geq OO' + O'B$

$\Rightarrow OM + MN + NB$ ngắn nhất khi O', N, B thẳng hàng.



Cách dựng:

– Dựng O' là ảnh của O qua $T_{\overrightarrow{BC}}$.

– Đường thẳng O'B cắt DC tại N.

– Dựng đường thẳng qua N, song song với AB, cắt AB tại M.

Chứng minh: Theo cách dựng thì M thuộc cạnh AB và N thuộc cạnh DC.

Tứ giác OO'NM là hình bình hành $\Rightarrow MN = OO' = BC = a$ và $OM = O'N$

$OM + MN + NB = OO' + O'N + NB = OO' + O'B = a + O'B$

Xét tam giác vuông O'HB, ta có: $BH = a + \dfrac{a}{2} = \dfrac{3a}{2}$ và $O'H = \dfrac{a}{2}$

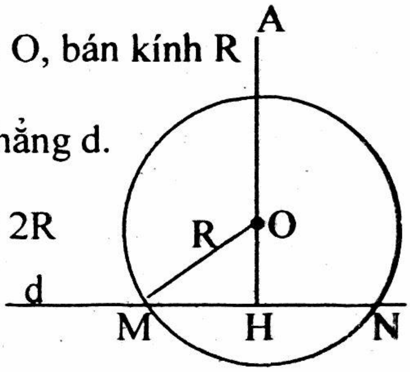
$O'B = \sqrt{O'H^2 + HB^2} = \dfrac{a\sqrt{10}}{2} \Rightarrow OM + MN + NB = a + \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$

Biện luận: Bài toán luôn có một nghiệm hình.

Bài 6. Phân tích: Giả sử dựng được đường tròn tâm O, bán kính R cắt đường thẳng d tại M, N sao cho MN = a.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng d.

Ta có: $OH = \sqrt{OM^2 - MH^2} = \dfrac{\sqrt{4R^2 - a^2}}{2}$ với $a < 2R$



Suy ra: $T_{\vec{v}} : H \to O$ với $\vec{v}$ cùng chiều với $\overrightarrow{HA}$ và $\left|\vec{v}\right| = \dfrac{\sqrt{4R^2 - a^2}}{2}$.

Cách dựng:

– Dựng điểm O là ảnh của H qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$.

– Dựng đường tròn tâm O, bán kính R sao cho $\left|\vec{v}\right| = \dfrac{\sqrt{4R^2 - a^2}}{2}$.

Chứng minh: Theo cách dựng, ta có: $OH = \left|\vec{v}\right| = \dfrac{\sqrt{4R^2 - a^2}}{2}$

$\Rightarrow a = 2\sqrt{R^2 - OH^2} = 2MH = MN$ và $OH < R \Rightarrow$ đường tròn tâm O, bán kính R

cắt đường thẳng d tại M, N sao cho MN = a.

Biện luận:

***) Nếu A thuộc đường thẳng d, trên d lấy hai điểm M, N sao cho MN = a. Khi đó, những đường tròn có tâm nằm trên đường trung trực đoạn thẳng MN đều cắt đường thẳng d tại M, N sao cho MN = a. Bài toán có vô số nghiệm hình.**

***) Nếu A không thuộc đường thẳng d thì dựng được hai đường tròn đối xứng nhau qua d và thoả mãn yêu cầu bài toán. Bài toán hai nghiệm hình.**

Bài 7. Gọi H, H_1 lần lượt là trực tâm tam giác MPQ và NPQ.

Ta có: $HM \perp PQ$, $AB \perp PQ \Rightarrow AO \,//\, HM$

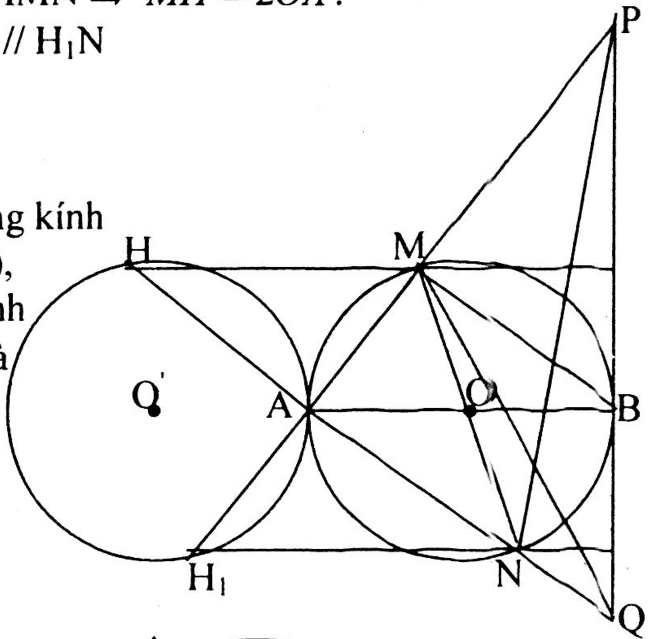
$\Rightarrow$ AO là đường trung bình trong $\Delta HMN \Rightarrow \overrightarrow{MH} = 2\overrightarrow{OA}$.

Ta có: $H_1N \perp PQ$, $AB \perp PQ \Rightarrow AO \,//\, H_1N$

$\Rightarrow \overrightarrow{NH_1} = 2\overrightarrow{OA}$

Suy ra: $T_{2\overrightarrow{OA}}$: M → H, N → H_1.

M, N thuộc đường tròn tâm O, đường kính AB nên H, H_1 thuộc đường tròn (O'), ảnh của đường tròn (O) qua phép tịnh tiến $T_{2\overrightarrow{OA}}$. Vậy quỹ tích của H, H_1 là đường tròn (O').

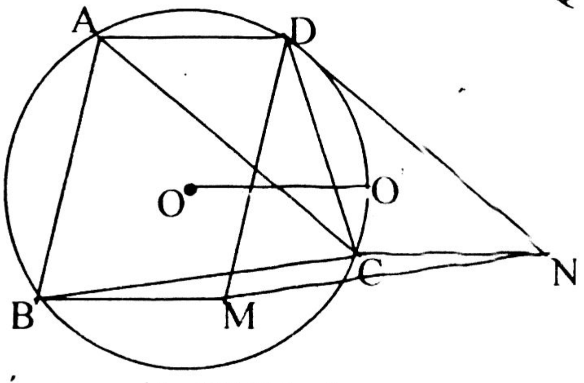


Bài 8.

Đặt $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, ta có $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\vec{a}\right| = R$,

R là bán kính đường tròn tâm O ngoại tiếp tứ giác ABCD. Tứ giác DABM, DACN là những hình bình hành nên $T_{\vec{a}}$: A → D, B → M, C → N

$\Rightarrow T_{\vec{a}}: \Delta ABC \rightarrow \Delta DMN \Rightarrow T_{\vec{a}}: O \rightarrow O'$



Suy ra: O' là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN và

$\overrightarrow{OO'} = \vec{a} \Rightarrow OO' = R$

Suy ra: O' thuộc đường tròn (O, R).

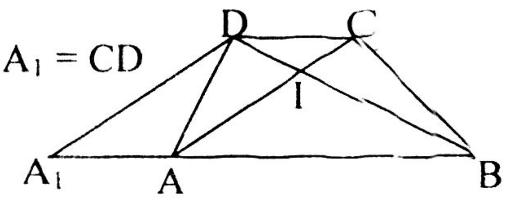
Bài 9. Ta có: AB // CD nên $T_{\overrightarrow{CD}}$: A → $A_1 \Rightarrow AA_1 = CD$

và $\widehat{A_1DB} = \widehat{AIB} = \alpha$, $DA_1 = CA$

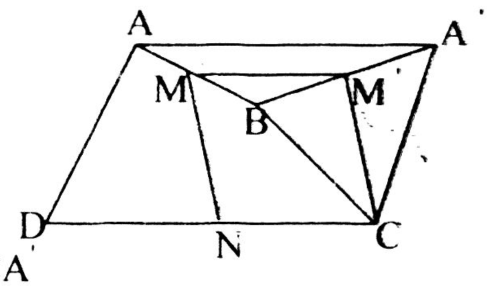
Trong ΔA_1DB, theo định lý cosin:

$A_1B^2 = A_1D^2 + BD^2 - 2A_1D.BD\cos\alpha$

$A_1B^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha \Rightarrow A_1B = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$



⇒ AB = $\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha} - c$



Bài 10. Xét phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{DC}}$: A → A'

⇒ $T_{\overrightarrow{DC}}$:M → M'

và M' là trung điểm của BA'.

⇒ $T_{\overrightarrow{DC}}$: $\overrightarrow{DA} \to \overrightarrow{CA'} \Rightarrow \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA'}$ ⇒ DA = CA'

⇒ MM' = $\frac{1}{2}$AA' = NC và MM' // NC ⇒ $\overrightarrow{CM'} = \overrightarrow{NM}$.

Ta có: MN tạo với AD, BC những góc bằng nhau nên CM' tạo với CA', CD những góc bằng nhau. Suy ra: CM ' là phân giác $\widehat{BCA'}$, trung tuyến kẻ từ đỉnh C của Δ BCA' ⇒ Δ BCA' cân tại C ⇒ CB = CA' = DA.

Bài 11. Ta có: $\overrightarrow{AB}$ = (4 ; 0), biểu thức giải tích của phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{AB}}$

là $\begin{cases} x' = x + 4 \\ y' = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' - 4 \\ y = y' \end{cases}$

$T_{\overrightarrow{AB}}$: d → d', phương trình của d': x + y − 5 = 0.

Ta có: M∈d ⇒ M' ∈d', M' ∈ (C) nên tọa độ của M' là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ (x-3)^2 + (y-1)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3; y = 2 \\ x = 4; y = 1 \end{array}\right.$$

M'_1(3 ; 2) thì M_1(− 1 ; 2) và M'_2(4 ; 1) thì M_2(0 ; 1).

Bài 12. Ta có: $\overrightarrow{AB}$ = (2 ; 3), biểu thức giải tích của phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{AB}}$

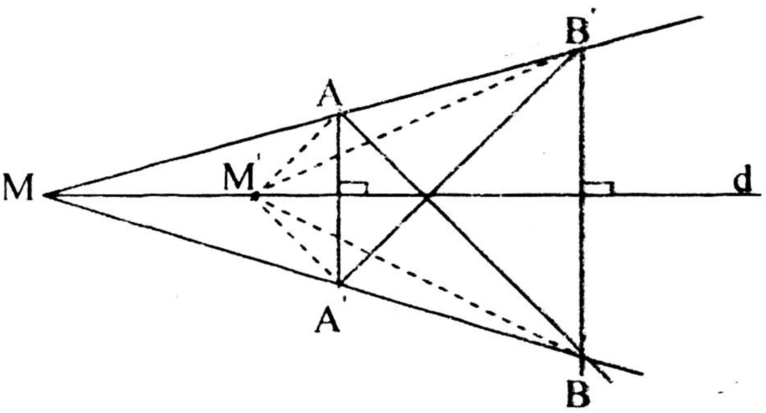
là $\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' + 3 \end{cases}$

a) $T_{\overrightarrow{AB}}$: M (4 ; − 5) → M'(x' ; y') thì M'(2 ; −8).

b) Phương trình tổng quát của đường thẳng d: 3x − 2y − 26 = 0.

$T_{\overrightarrow{AB}}$: d → d' thì phương trình của d' là: 3x − 2y − 26 = 0.

c) $T_{\overrightarrow{AB}}$: (C) → (C') thì phương trình của (C'): $x^2 + y^2 + 14y + 24 = 0$.



§2. PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

Bài 1. Xét phép đối xứng trục $Đ_d$: $A \to A'$

$B \to B' \Rightarrow Đ_d$: $AB \to A'B'$

Gọi M là giao điểm của AB' với d

Ta có $|MB - MA| = |MB - MA'| = A'B$.

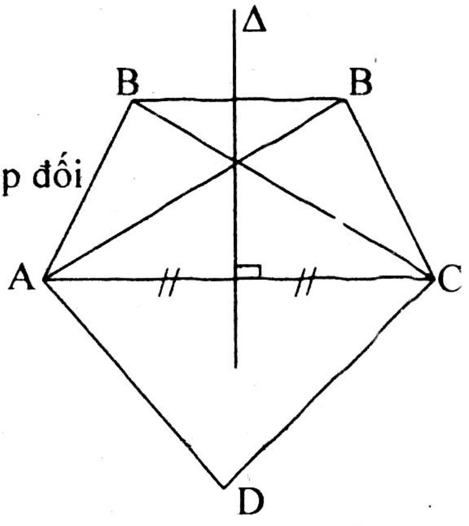
$\forall M' \in d$ và $M' \neq M$, ta có:

$|M'B - M'A| = |M'B - M'A'| < A'B$.

Suy ra: $|MB - MA| > |M'B - M'A|$. Do đó,

$|MB - MA|$ lớn nhất M là giao điểm của AB' với d.

Bài 2.



Gọi Δ là đường trung trực đường chéo AC, phép đối xứng $Đ_\Delta$: $A \to C$, $B \to B' \Rightarrow AB = CB' = a$ và $AB' = BC = b$.

$$S = S_{ABCD} = S_{AB'CD} = S_{B'CD} + S_{B'AD}$$

$$= \frac{1}{2}B'C.CD\sin\widehat{B'CD} + \frac{1}{2}AB'.AD\sin\widehat{B'AD}$$

$$= \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B'CD} + \frac{1}{2}bd\sin\widehat{B'AD} \leq \frac{ac+bd}{2}.$$

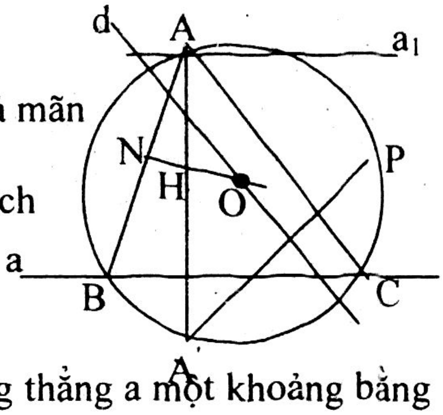
Bài 3. a) Quỹ tích tâm O.

Gọi A' đối xứng với H qua đường thẳng cố định a thì A' cố định

Ta có OA' = OP nên O thuộc đường trung trực d của đoạn thẳng A'P

Suy ra, quỹ tích của tâm O là đường thẳng d.

b) Dựng tam giác ABC.



Phân tích: Giả sử dựng được tam giác ABC thoả mãn điều kiện bài toán.

Ta có: NB = NA và đặt m = d(N, a) là khoảng cách từ N đến đường thẳng a thì $A \in a_1$, a_1 // a và cách đường thẳng a một khoảng bằng 2m.

Cách dựng:

– Dựng đường thẳng a_1 song song và cách đường thẳng a một khoảng bằng 2m.

– Dựng đường thẳng qua H, vuông góc với đường thẳng a, cắt đường thẳng a_1 tại A.

– Dựng đường thẳng AN cắt đường thẳng a tại B.

– Dựng đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABP cắt đường thẳng a tại C.

Tam giác ABC dựng được.

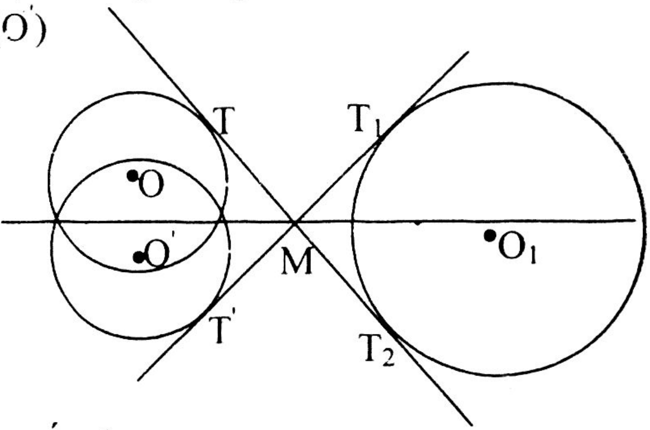
Chứng minh: Theo cách dựng, ta có N là trung điểm cạnh AB, B và C thuộc đường thẳng a. Đường trònngoại tiếp tam giác ABC đi qua điểm cố định P.

Biện luận: Bài toán có một nghiệm hình.

Bài 4. * Giả sử $M \in \Delta$ sao cho tiếp tuyến kẻ từ M đến (O), (O_1) là MT, MT_1 tạo với đường thẳng Δ các góc bằng nhau. Khi đó có hai khả năng xảy ra:

1) MT, MT_1 cùng nằm trên một đường thẳng TT_2 nên TT_2 là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O), (O_1). Suy ra M là giao điểm của đường thẳng Δ và TT_2.

2) MT, MT_1 không cùng nằm trên một đường thẳng



Ta dùng phép đối xứng ĐΔ: $(O) \rightarrow (O')$ MT là tiếp tuyến của (O) thì MT' là tiếp tuyến của $(O') \Rightarrow$ MT', MT_1 cùng nằm trên một đường thẳng TT_1 nên M là giao điểm của đường thẳng Δ và TT_1.

* Khi hai đường tròn (O), (O_1) chứa nhau thì bài toán không có nghiệm hình.

* Khi hai đường tròn (O), (O_1) không cắt nhau thì có nhiều nhất 8 tiếp tuyến chung nên bài toán có nhiều nhất 8 nghiệm hình.

Bài 5 Giả sử M thuộc cạnh BC, gọi M_1, M_2 lần lượt đối xứng với M qua AC, AB. Đường thẳng M_1M_2 cắt AB, AC tại P, N.

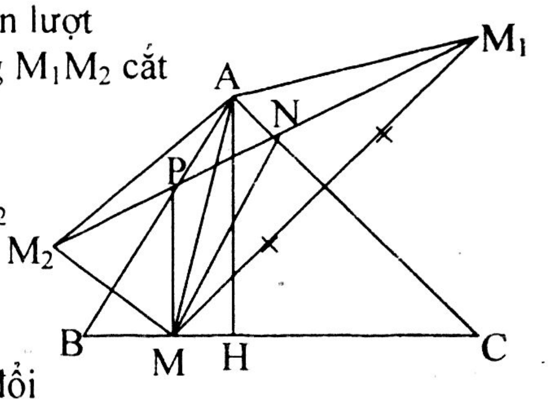
Ta có: $MN + NP + MP = M_1M_2$.

Mặt khác $AM = AM_2 = AM_1$ nên Δ AM_1M_2 cân tại A và $\widehat{M_1AM_2} = 2\widehat{BAC}$.

ΔMNP có chu vi nhỏ nhất khi M_1M_2 ngắn nhất. Trong Δ AM_1M_2 có $\widehat{M_1AM_2}$ không đổi nên M_1M_2 ngắn nhất khi AM_1, AM_2 ngắn nhất. Suy ra AM ngắn nhất.

Ta có $AM \geq AH$ (AH là đường cao của Δ ABC) $\Rightarrow M \equiv H$.

Lập luận tương tự, $CP \perp AB$, $BN \perp AC$. Vậy M, N, P lần lượt là chân các đường cao của Δ ABC.



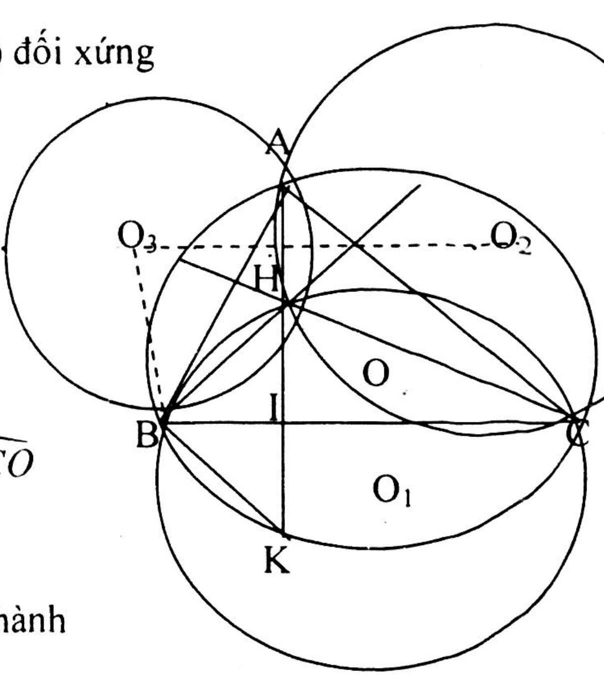
Bài 6. $\widehat{CBK} = \widehat{CAI}$ (Cùng chắn cung $\overset{\frown}{KC}$)

$\widehat{CAI} = \widehat{CBH}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc) nên:

$\widehat{CBK} = \widehat{CBH}$, $AH \perp BC$

$\Rightarrow$ Δ HBK cân tại B $\Rightarrow$ HI = IK

$\Rightarrow$ H, K đối xứng qua BC.

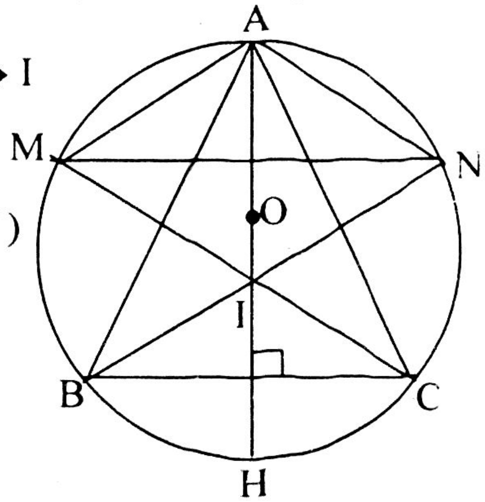


Mà K$\in$(O) nên H $\in(O_1)$ với (O_1) đối xứng với (O) qua BC.
Tương tự, H $\in(O_2)$ và H $\in(O_3)$ với (O_2), (O_3) đối xứng với (O) qua AC, AB.
Mặt khác, $O_2O_3 \perp$ AH và BC $\perp$ BC $\Rightarrow O_2O_3$ // BC

$$\widehat{O_3BC}+\widehat{O_2CB}$$
$$=2\widehat{ABO}+\widehat{OBC}+\widehat{OCB}+2\widehat{ACO}$$
$$=\widehat{BAC}+\widehat{ACB}+\widehat{CBA}=2\pi$$

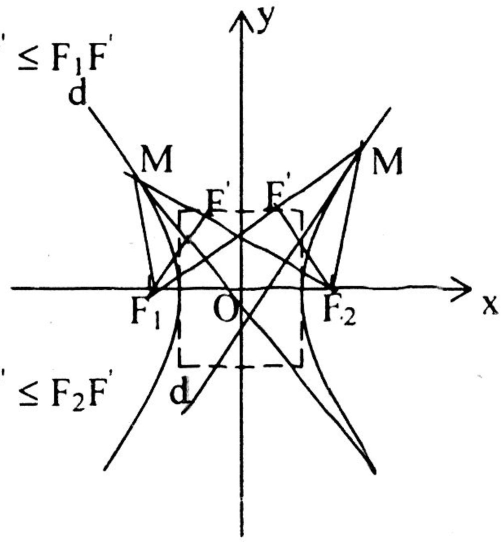
$\Rightarrow BO_3$ // CO_2
$\Rightarrow$ tứ giác O_2O_3BC là hình bình hành
$\Rightarrow O_2O_3 =$ BC.
Tương tự, ta có $O_1O_3 =$ AC và $O_1O_2 =$ AB
Suy ra: Δ ABC = $\Delta O_1O_2O_3$ (cạnh – cạnh – cạnh)

Bài 7. Ta có Δ ABC cân tại A và nội tiếp đường tròn (O) nên đường cao AH là đường kính và cũng là trục đối xứng.



Xét phép đối xứng Đ$_{AH}$: B → C ; M → N ; I → I
Suy ra: AM = AN, BN = CM, BI = CI
và AI $\perp$ MN$\Rightarrow$ MI = NI.
Mặt khác: $\widehat{ABN}=\widehat{CBN}$ (BN là phân giác $\widehat{ABC}$)
$\Rightarrow \overset{\frown}{AN}=\overset{\frown}{NC} \Rightarrow \widehat{AMN}=\widehat{CMN}$
$\Rightarrow \Delta$ AMI cân tại M $\Rightarrow$ MA = MI.
Suy ra tứ giác AMIN là hình thoi.

Bài 8. Giả sử hypebol (H) có trục thực 2a
$\forall$M $\in$ (H) thì $|MF_1-MF_2|=2a$.

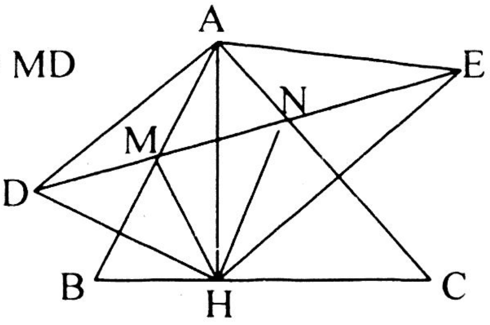


Trường hợp 1: Khi $MF_1 - MF_2 = 2a$.
Gọi F' đối xứng với F_2 qua đường thẳng d thì $MF' = MF_2$
F' nằm giữa M và F_1.
Lấy bất kỳ điểm N$\in$ d, $NF_1 - NF_2 = NF_1 - NF' \le F_1F'$
$F_1F' = MF_1 - MF' = MF_1 - MF_2 = 2a$
$\Rightarrow NF_1 - NF_2 \le 2a$.
Dấu đẳng thức xảy ra khi N $\equiv$ M.

Trường hợp 2: Khi $MF_2 - MF_1 = 2a$.
Gọi F' đối xứng với F_1 qua đường thẳng d thì $MF' = MF_1$ và F' nằm giữa M, F_1.
Lấy bất kỳ điểm N$\in$ d, $NF_2 - NF_1 = NF_2 - NF' \le F_2F'$
$F_2F' = MF_2 - MF' = MF_2 - MF_1 = 2a$

$\Rightarrow NF_2 - NF_1 \le 2a$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $N \equiv M$. Vậy, đường thẳng d luôn cắt (H) tại một điểm duy nhất M.



Bài 9. Ta có $Đ_{AB}$: $H \to D \Rightarrow AH = AD$ và $MH = MD$

$\Rightarrow \Delta\, AMD = \Delta\, AMH$ (cạnh – cạnh – cạnh)

$\Rightarrow \widehat{AHM} = \widehat{ADM}$ (1)

Ta có: $Đ_{AC}$: $H \to E \Rightarrow AH = AE$ và $NH = NE$

$\Rightarrow \Delta\, ANE = \Delta\, ANH$ (cạnh – cạnh – cạnh)

$\Rightarrow \widehat{AHN} = \widehat{AEN}$ (2)

Mặt khác, $\Delta\, ADE$ cân tại $E \Rightarrow \widehat{ADM} = \widehat{AEN}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có $\widehat{AHM} = \widehat{AHN} \Rightarrow$ AH là phân giác góc $\widehat{MHN}$.

Bài 10. Biểu thức giải tích của phép đối xứng trục $Đ_{\Delta}$, trục Δ: $Ax + By + C = 0$ với

$$A^2 + B^2 \neq 0 \text{ là } \begin{cases} x' = x - \dfrac{2A(Ax + By + C)}{A^2 + B^2} \\ y' = y - \dfrac{2B(Ax + By + C)}{A^2 + B^2} \end{cases}$$

a) Khi Δ là trục hoành, phương trình của Δ: $y = 0$ nên biểu thức giải tích của

$$Đ_{\Delta}: \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

$Đ_{\Delta}$: $M(3\,;\,-5) \to M'$ nên $M'(3\,;\,5)$.

$Đ_{\Delta}$: $d \to d'$ có phương trình: $3x - 2y - 6 = 0$.

$Đ_{\Delta}$: $(C) \to (C')$ có phương trình: $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$.

b) Khi Δ là trục tung, phương trình của Δ: $x = 0$ nên biểu thức giải tích của

$$Đ_{\Delta}: \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

$Đ_{\Delta}$: $M(3\,;\,-5) \to M'$ nên $M'(-3\,;\,-5)$

$Đ_{\Delta}$: $d \to d'$ có phương trình: $3x - 2y + 6 = 0$

$Đ_{\Delta}$: $(C) \to (C')$ có phương trình: $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0$

c) Khi Δ có phương trình $x - y + 1 = 0$ nên biểu thức giải tích của $Đ_{\Delta}$:

$$\begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = x + 1 \end{cases}$$

$Đ_{\Delta}$: $M(3\,;\,-5) \to M'$ nên $M'(-6\,;\,4)$

$Đ_{\Delta}$: $d \to d'$ có phương trình: $2x + 3y - 7 = 0$.

Đường tròn (C) có tâm $I(1\,;\,-2)$ và bán kính $R = 3$.

$Đ_\Delta$: $I(1\ ;-2) \rightarrow I'$ nên $I'(-3\ ;2)$

$Đ_\Delta$: $(C) \rightarrow (C')$ có phương trình: $(x+3)^2+(y-2)^2=9$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+6x-4y+4=0.$$

Bài 11. Phương trình đường thẳng d_1: $x-5y+7=0$, d_2: $5x-y-13=0$.

Suy ra: d_1 và d_2 cắt nhau nên phép đối xứng trục biến đường thẳng d_1 thành đường thẳng d_2 có trục là đường phân giác của góc tạo bởi d_1 và d_2.

Phương trình đường phân giác của góc tạo bởi d_1 và d_2 là:

$$\frac{x-5y+7}{\sqrt{26}}=\pm\frac{5x-y-13}{\sqrt{26}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+y-5=0\\x-y-1=0\end{array}\right.$$

* Khi Δ có phương trình $x+y-5=0$ nên biểu thức giải tích của $Đ_\Delta$:

$$\begin{cases}x'=-y+5\\y'=-x+5\end{cases}$$

* Khi Δ có phương trình $x-y-1=0$ nên biểu thức giải tích của $Đ_\Delta$:

$$\begin{cases}x'=y+1\\y'=x-1\end{cases}$$

Bài 12. Ta có: $f: M(x\ ;y)\rightarrow M'(x'\ ;y')$ có biểu thức giải tích:

$$\begin{cases}x'=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}x+\dfrac{2}{3}y\\[2mm] y'=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{\sqrt{5}}{3}y\end{cases}\quad(1)$$

a) $f: M(x\ ;y)\rightarrow M(x\ ;y)$, thay vào (1) ta có: $\left(3+\sqrt{5}\right)x-2y=0$ là phương trình tập hợp các điểm kép của f.

b) $f: M(x\ ;y)\rightarrow M'(x'\ ;y')\Rightarrow g: M'(x'\ ;y')\rightarrow M(x\ ;y)$

có biểu thức giải tích: $$\begin{cases}x=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}x'+\dfrac{2}{3}y'\\[2mm] y=\dfrac{2}{3}x'+\dfrac{\sqrt{5}}{3}y'\end{cases}\quad(2)$$

So sánh f và g ta có f = g.

c) $f: M(x\ ;y)\rightarrow M'(x'\ ;y')$ nên

$$\overrightarrow{MM'}=\left(x'-x\ ;y'-y\right)\Rightarrow\overrightarrow{MM'}=\left(-\frac{\sqrt{5}+3}{3}x+\frac{2}{3}y\ ;\frac{2}{3}x+\frac{\sqrt{5}-3}{3}y\right)$$

Véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\overrightarrow{\Delta}=\left(2\ ;3+\sqrt{5}\right)$

$$\overrightarrow{MM'}.\vec{\Delta}=\left(-\frac{\sqrt{5}+3}{3}x+\frac{2}{3}y\right)2+\left(\frac{2}{3}x+\frac{\sqrt{5}-3}{3}y\right)\left(3+\sqrt{5}\right)=0\Rightarrow\overrightarrow{MM'}\perp\vec{\Delta}$$

$\Rightarrow MM' \perp \Delta$

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng MM' thì

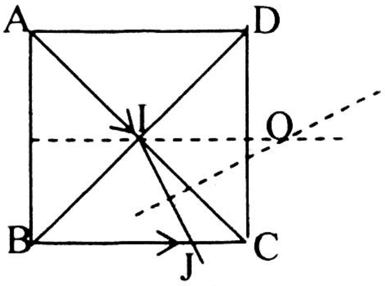
$$I\left(\frac{x+x'}{2};\frac{y+y'}{2}\right)\Rightarrow I\left(\frac{3-\sqrt{5}}{6}x+\frac{1}{3}y;\frac{1}{3}x+\frac{3+\sqrt{5}}{6}y\right)$$

Thay vào phương trình của đường thẳng Δ:

$$\left(3+\sqrt{5}\right)\left(\frac{3-\sqrt{5}}{6}x+\frac{1}{3}y\right)-2\left(\frac{1}{3}x+\frac{3+\sqrt{5}}{6}y\right)=\frac{2}{3}x+\frac{3+\sqrt{5}}{3}y-\frac{2}{3}x-\frac{3+\sqrt{5}}{3}y=0$$

Suy ra: $I \in \Delta$. Vậy, phép biến hình f là phép đối xứng trục Δ.

§3. PHÉP QUAY

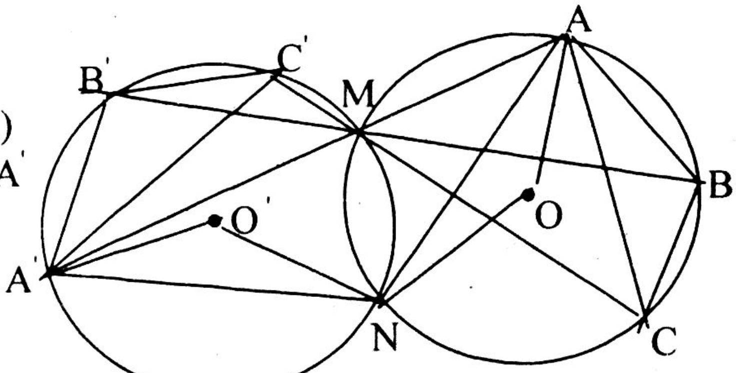


Bài 1. Ta có $AI=\frac{1}{2}AC=\frac{AB\sqrt{2}}{2}=1\Rightarrow AI=BJ$

Mặt khác $(AI, BJ) = 45^0$

⇒BJ là ảnh của AI qua phép quay tâm O, góc quay 45^0. Tâm quay O là giao điểm của hai đường trung trực của hai đoạn thẳng AB và IJ.

Bài 2.



Ta có: $\widehat{NAM}=\widehat{NA'M}$

(cùng chắn hai cung bằng nhau)

$\Rightarrow \Delta ANA'$ cân tại $N \Rightarrow NA = NA'$

$\Rightarrow \Delta OAN = \Delta O'A'N$

$\Rightarrow \widehat{ONA}=\widehat{O'NA'}$

$\Rightarrow \widehat{ANA'}=\widehat{ONO'}$

Tương tự: $NB = NB'$ và $\widehat{BNB'}=\widehat{ONO'}$

$NC = NC'$ và $\widehat{CNC'}=\widehat{ONO'}$

Suy ra, phép quay $Q(N ; \widehat{ONO'})$: $\Delta ABC \to \Delta A'B'C'$.

Bài 3. Ta có $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Rightarrow D_I: A\to C.$

Mà $A\in(O)\Rightarrow D_I: (O)\to(O_1)$ và $C\in(O_1)$

Quỹ tích của điểm C là đường tròn (O_1), ảnh của đường tròn (O) qua phép đối xứng tâm D_I.

Ta có: $IA = IB$ và $(IA, IB) = 90^0$

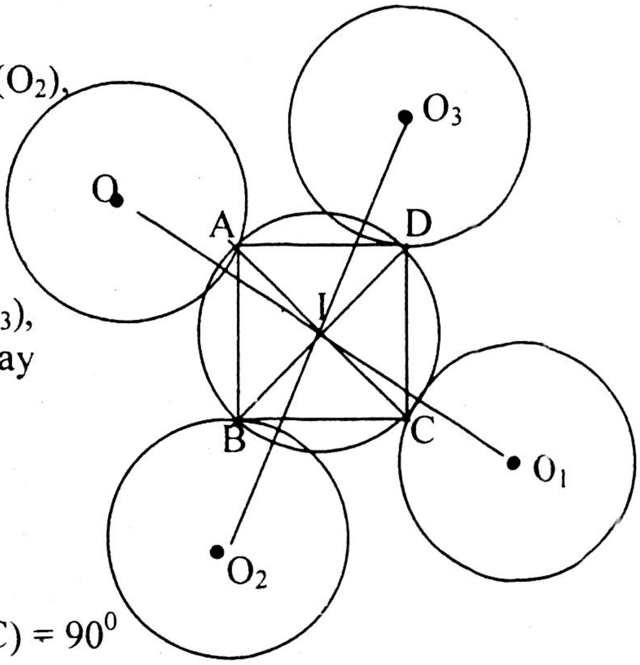
$\Rightarrow Q(I\,;\,90^0): A \rightarrow B$.

Quỹ tích của điểm B là đường tròn (O_2), ảnh của đường tròn (O) qua phép quay $Q(I\,;\,90^0)$

Ta có: $IA = ID$ và $(IA, ID) = 90^0$

$\Rightarrow Q(I\,;\,-90^0): A \rightarrow D$.

Quỹ tích của điểm Đ là đường tròn (O_3), ảnh của đường tròn (O) qua phép quay $Q(I\,;\,-90^0)$.



Bài 4. a) Ta có: $BM = BC$ và $(BM, BC) = 90^0$

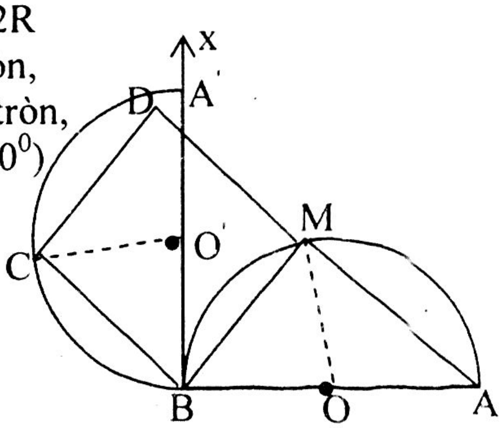
$\Rightarrow Q(B\,;\,90^0): M \rightarrow C$.

M thuộc nửa đường tròn, đường kính $AB = 2R$

Suy ra, quỹ tích của điểm C là nửa đường tròn, đường kính $BA' = 2R$ là ảnh của nửa đường tròn, đường kính $AB = 2R$ qua phép quay $Q(B\,;\,90^0)$

b) Ta có: $BO = BO'$ và $(BO, BO') = 90^0$

$\Rightarrow Q(B\,;\,90^0): O \rightarrow O' \Rightarrow MO = CO'$ và $MO \perp CO'$.



Bài 5. a) Xét hai tam giác $\Delta\, ABF$ và $\Delta\, DAJ$:

Có $BA \perp DA$ và $BF \perp AJ \Rightarrow \widehat{ABF} = \widehat{DAJ}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)

Mặt khác: $BA = DA \Rightarrow \Delta\, ABF = \Delta\, DAJ$ (cạnh huyền – góc nhọn).

Ta có: $OB = OA$ và $(OB, OA) = 90^0$; $OA = OD$ và $(OA, OD) = 90^0$

$\Rightarrow Q(O\,;\,90^0): B \rightarrow A$; $A \rightarrow D$ và $BF \perp AJ$

$\Rightarrow Q(O\,;\,90^0): F \rightarrow J$

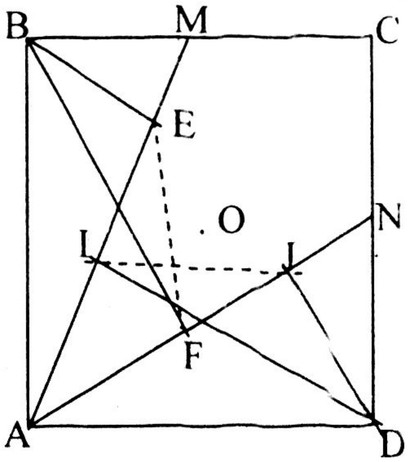
$\Rightarrow Q(O\,;\,90^0): \Delta\, BAF \rightarrow \Delta\, ADJ$.

b) $\Rightarrow Q(O\,;\,90^0): B \rightarrow A$; $A \rightarrow D$ và $BE \perp AI$

$\Rightarrow Q(O\,;\,90^0): E \rightarrow I$

$\Rightarrow Q(O\,;\,90^0): \Delta\, BAE \rightarrow \Delta\, ADI$

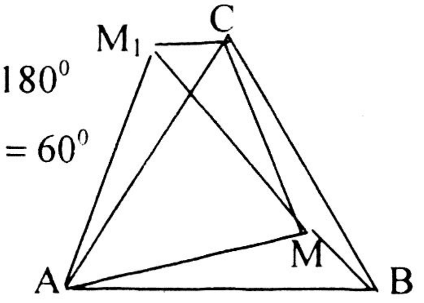
c) $Q(O\,;\,90^0): F \rightarrow J$ và $E \rightarrow I \Rightarrow FE \perp JI$.



Bài 6. Trường hợp 1:

Khi điểm M nằm trong tam giác ABC và $\widehat{AMB} = 120^0$

Xét phép quay $Q(A\,;\,60^0): M \rightarrow M_1$, $B \rightarrow C$



$\Rightarrow MB = CM_1$ và $(MB, CM_1) = 60^0$.

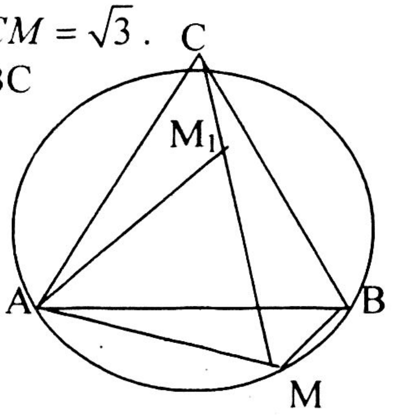
Mặt khác: $\widehat{BMM_1} = \widehat{BMA} + \widehat{AMM_1} = 120^0 + 60^0 = 180^0$

$\Rightarrow$ B, M, M_1 thẳng hàng $\Rightarrow (MB, CM_1) = \widehat{CM_1M} = 60^0$

Trong $\Delta\ CMM_1$, theo định lý côsin:

$$CM^2 = CM_1^2 + M_1M^2 - 2CM_1M_1M\cos\widehat{CM_1M}$$

Ta có: $MB = CM_1 = 2$; $AM = MM_1 = 1$, thay vào: $CM = \sqrt{3}$.



Trường hợp 2: Khi điểm M nằm ngoài tam giác ABC và $\widehat{AMB} = 120^0$.

Xét phép quay Q(A ; 60^0): $M \rightarrow M_1$, $B \rightarrow C$

$\Rightarrow MB = CM_1$ và $(MB, CM_1) = 60^0$

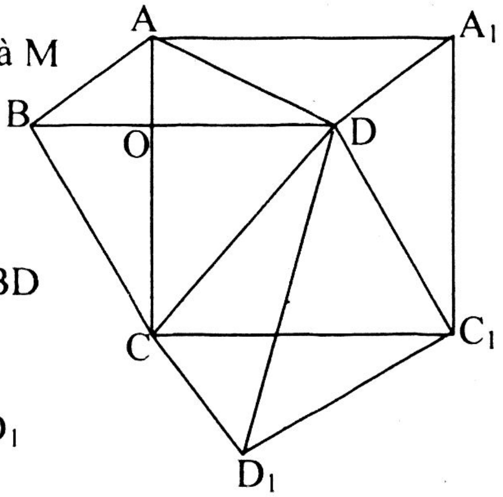
$\Rightarrow \Delta\ AMB = \Delta\ AM_1C$ (cạnh – cạnh – cạnh)

$\Rightarrow \widehat{AM_1C} = \widehat{AMB} = 120^0$

$\widehat{MM_1C} = \widehat{MM_1A} + \widehat{AM_1C} = 60^0 + 120^0 = 180^0$

$\Rightarrow$ C, M_1, M thẳng hàng và M_1 nằm giữa C và M

$CM = CM_1 + M_1M = MB + AM = 2 + 1 = 3$



Bài 7. Vẽ hình vuông AA_1C_1C sao cho $AA_1 \,//\, BD$

$\Rightarrow AA_1DB$ là hình bình hành. $\Rightarrow A_1D = AB$

BDC_1C là hình bình hành. $\Rightarrow C_1D = BC$.

Xét phép quay Q (C_1 ; 90^0): $A_1 \rightarrow C$; $D \rightarrow D_1$

$\Rightarrow A_1D = CD_1$, $C_1D = C_1D_1$ và $\widehat{DC_1D_1} = 90^0$

$\Rightarrow \Delta\ DC_1D_1$ vuông cân tại C_1.

$DD_1^2 = C_1D^2 + C_1D_1^2 = 2C_1D^2 = 2BC^2 = 4 \Rightarrow DD_1 = 2$

Trong $\Delta\ CDD_1$, ta có: $CD^2 + D_1C^2 = 3 + 1 = 4 = DD_1^2$

$\Rightarrow \Delta\ CDD_1$ vuông tại C $\Rightarrow$ tứ giác DCD_1C_1 nội tiếp một đường tròn, đường kính DD_1. $\Rightarrow$

$\widehat{DCC_1} = \widehat{DD_1C_1} = 45^0$; $\widehat{C_1CD_1} = \widehat{D_1DC_1} = 45^0$.

Ta có $BD \,//\, CC_1 \Rightarrow \widehat{ODC} = \widehat{DCC_1} = 45^0$ (so le trong) $\Rightarrow \Delta ODC$ vuông cân tại O

$OD^2 + OC^2 = CD^2 \Rightarrow OD = OC = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

Từ $AC = DB$ và $AC \perp DB \Rightarrow OA = OB = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Trong tam giác vuông AOD, $\tan\widehat{OAD} = \dfrac{OD}{OA} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{OAD} = 60^0$;

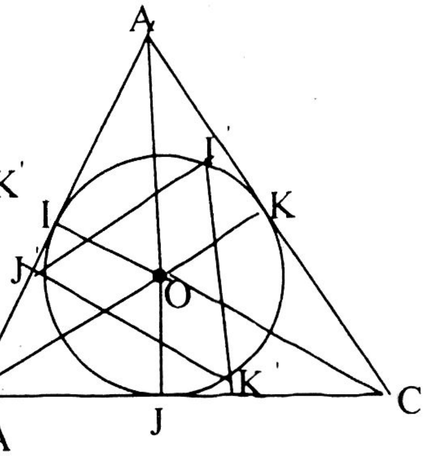
$\widehat{ODA} = 30^0$.

Suy ra: $\widehat{BAD} = \widehat{BAO} + \widehat{OAD} = 45^0 + 60^0 = 105^0$ và $\widehat{ADC} = 30^0 + 45^0 = 75^0$

Tương tự, trong tam giác vuông BOC, $\tan\widehat{OBC} = \dfrac{OC}{OB} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{OBC} = 60^0$;

$\widehat{OBC} = 30^0$ Suy ra: $\widehat{ABC} = 45^0 + 60^0 = 105^0$ và $\widehat{BCD} = 30^0 + 45^0 = 75^0$.

Bài 8. Ta có: OI ⊥ AB và OK ⊥ AC ⇒ tứ giác AIOK nội tiếp một đường tròn, đường kính OA.



Trong Δ AIK, theo định lý sin:

$\dfrac{IK}{\sin A} = 2R = OA \Rightarrow$ IK = OA sinA

Xét phép quay Q(O ; – 90^0): I → I', J → J', K → K'

⇒ IK ⊥ I'K' và IK = I'K'

Mặt khác, Δ AIK cân tại A nên OA ⊥ IK

(Đường phân giác cũng là đường cao)

⇒ I'K' // OA và I'K' = OA sinA ⇒ $\overrightarrow{K'I'} = \overrightarrow{OA}\sin A$

Tương tự, ta có: $\overrightarrow{J'K'} = \overrightarrow{OC}\sin C$; $\overrightarrow{I'J'} = \overrightarrow{OB}\sin B$

Suy ra: $\overrightarrow{OA}\sin A + \overrightarrow{OB}\sin B + \overrightarrow{OC}\sin C = \overrightarrow{K'I'} + \overrightarrow{I'J'} + \overrightarrow{J'K'} = \overrightarrow{K'K'} = \vec{0}$.

Bài 9.

a) Ta có: AN = AB, (AN, AB) = 90^0

AQ = AC, (AQ, AC) = 90^0

⇒ Q(A ; 90^0): N → B, C → Q

⇒ NC = BQ và NC ⊥ BQ

b) Ta có DK là đường trung bình của Δ BCN

⇒ DK // CN và

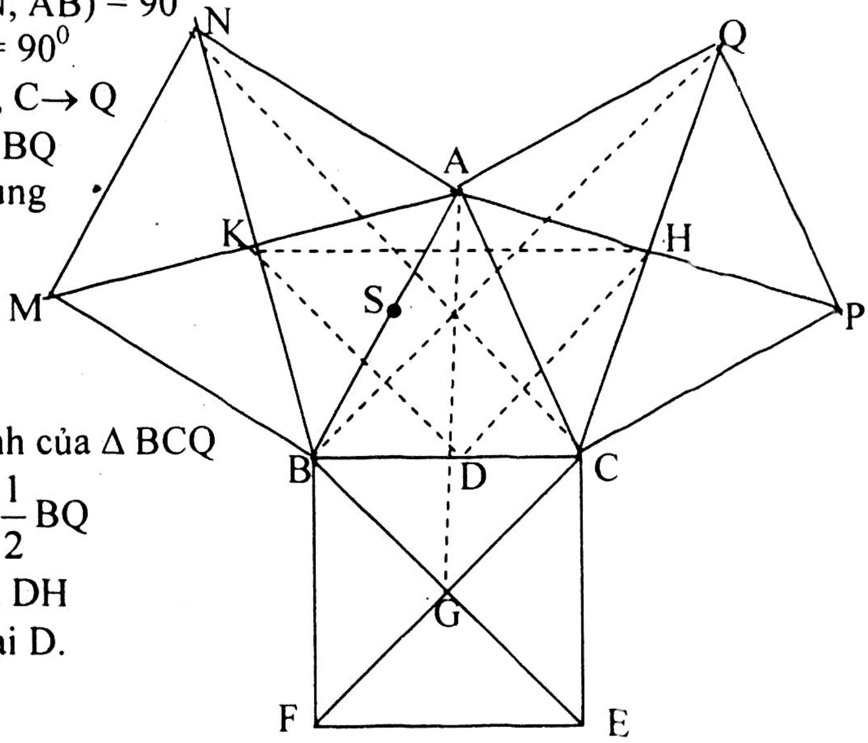
DK = $\dfrac{1}{2}$CN.

DH là đường trung bình của Δ BCQ

⇒ DH // BQ và DH= $\dfrac{1}{2}$BQ

⇒ DK = DH và DK ⊥ DH

⇒ΔDKH vuông cân tại D.



Tương tự, gọi S là trung điểm AB, ta chứng minh được ⇒ΔSHG vuông cân tại S.

Xét phép quay Q (S ; 90^0): A → K, G → H ⇒ AG = KH và AG ⊥ KH.

Bài 10. Xét hai hình vuông bằng nhau, có cùng tâm O là ABCD, $A_1B_1C_1D_1$.

Đặt $\varphi = \widehat{AOA_1}$ thì Q (O ; φ): ABCD → $A_1B_1C_1D_1$.

Khi đó E và K đối xứng nhau qua O ; F và L đối xứng nhau qua O.

Suy ra: EF = KL ⇒ Δ A_1EF = Δ C_1KL.

⇒ $A_1E = C_1K$ và $A_1F = C_1L$.

Tương tự ta có: ΔBGF = ΔDML ;

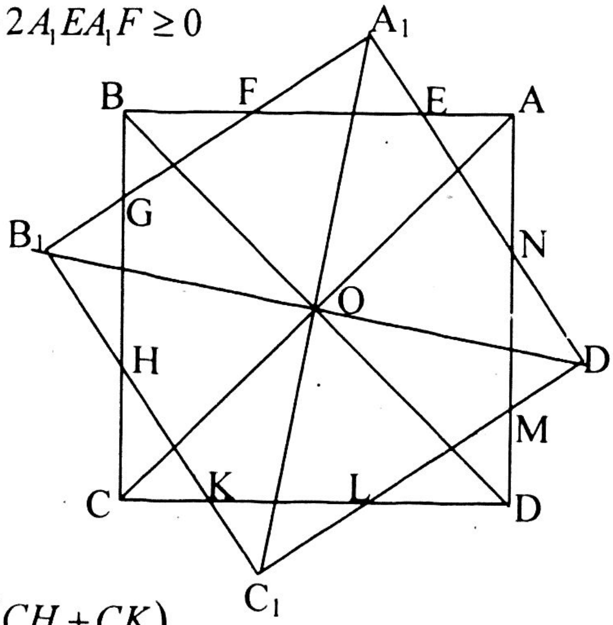
$\Delta B_1GH = \Delta D_1MN$; ΔCHK = ΔANE

Giao của hai hình vuông ABCD, $A_1B_1C_1D_1$ là hình bát giác EFGHKLMN có chu vi y = 2 (EF + FG + GH + HK)

Ta có: $(A_1E - A_1F)^2 = A_1E^2 + A_1F^2 - 2A_1EA_1F \geq 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{A_1E^2 + A_1F^2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(A_1E + A_1F)$$

Suy ra: $EF \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(A_1E + A_1F)$



Tương tự, $FG \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(BF + BG)$;

$GH \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(B_1G + B_1H)$; $HK \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(CH + CK)$

$$\Rightarrow EF + FG + GH + K \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(A_1E + A_1F + BF + BG + B_1G + B_1H + CH + CK) \quad (*)$$

Thay $A_1E = C_1K$ và CK = AE vào (*) ta có:

$$EF + FG + GH + HK \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(AE + BF + A_1F + B_1G + BG + CH + B_1H + C_1K).$$

Gọi a là độ dài cạnh của hình vuông ABCD thì:

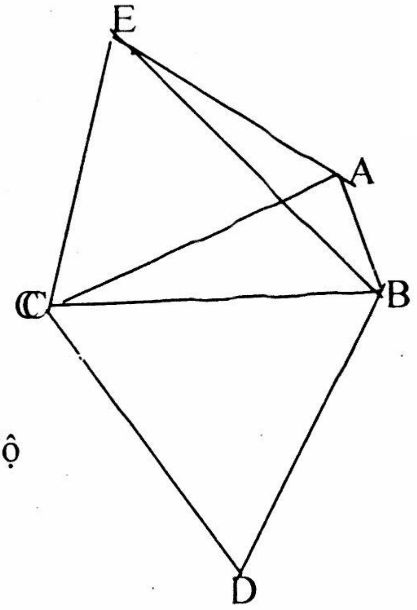
$$EF + FG + GH + HK \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(a - EF + a - FG + a - GH + a - HK)$$

$$\Leftrightarrow y \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(4a - \frac{y}{2}\right) \Leftrightarrow y \geq 8a\left(\sqrt{2} - 1\right).$$

Chu vi của hình bát giác nhỏ nhất là y = $8a(\sqrt{2}-1)$ khi hình bát giác đều. Suy ra độ dài mỗi cạnh của bát giác bằng $a(\sqrt{2}-1)$. Suy ra ΔANE vuông cân tại A nên $\widehat{ANE} = 45^0$. Mặt khác, ta có tứ giác AA_1ON nội tiếp một đường tròn.

Suy ra: $\varphi = \widehat{AOA_1} = \widehat{ANE} = 45^0$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{A_1A}$).

Bài 11.



Xét phép quay Q (C ; 60^0): D → B ; A → E

Suy ra: AD = BE và CA = CE = AE

AD = BE ≤ AE + AB = 5 + 2 = 7.

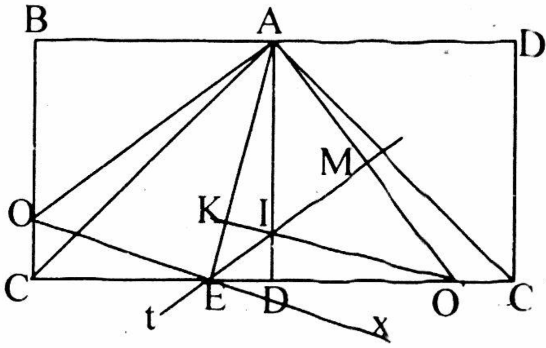
Đoạn thẳng AD có độ dài lớn nhất khi BE có độ dài lớn nhất.

Suy ra: AD = 7 khi B, A, E thẳng hàng

$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{ACE} + \widehat{CEA} = 60^0 + 60^0 = 120^0$

Vậy, khi $\varphi = \widehat{BAC} = 120^0$ thì đoạn thẳng AD có độ dài lớn nhất và AD = 7.

Bài 12. Phân tích: Giả sử dựng được hình vuông ABCD thoả mãn điều kiện bài toán.



Khi đó: AB = AD và (AB, AD) = 90^0

Phép quay Q (A ; 90^0): B → D ; O → O'

C → C' ; D→ D'

AO là phân giác góc $\widehat{BAE}$ và AO ⊥ AO', $\widehat{BAE} + \widehat{EAD'} = 180^0$ thì AO' là phân giác góc $\widehat{EAD'}$. Suy ra O' cách đều AE và AD' một khoảng bằng AD = a

⇒ O'K ⊥ AE và O'K = AD ⇒Δ ADE = Δ O'KE (Cạnh huyền – góc nhọn)

⇒ AE = O'E. Gọi I là giao điểm của AD với O'K thì I là trực tâm của ΔAEO'

⇒ EI ⊥ AO' tại M là trung điểm của AO'.

Cách dựng

– Dựng O' là ảnh của O qua phép quay Q (A ; 90^0).

– Dựng đường trung trực M_t của đoạn thẳng AO', M_t cắt Ox tại E.

– Dựng O'K ⊥ AE và O'K cắt M_t tại I.

– Dựng AI ⊥ E O' tại D.

– Dựng điểm C thuộc ED sao cho DC = AD.

– Dựng điểm B thuộc OC sao cho BC = AD

– Hình vuông ABCD dựng được.

Chứng minh: Theo cách dựng, hình vuông ABCD dựng được thoả mãn yêu cầu bài toán.

Biện luận: Bài toán có một nghiệm hình.

Bài 13. a) Xét phép biến hình f: M(x ; y) → M(x ; y).

Thay vào:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{1}{2}y + 1 \\ y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4-\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}} \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

. Gọi I (x_0 ; y_0) với $\begin{cases} x_0 = \dfrac{4-\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}} \\ y_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Ta có:

$$\begin{cases} x' - x_0 = (x - x_0)\dfrac{\sqrt{3}}{2} - (y - y_0)\dfrac{1}{2} \\ y' - y_0 = (x - x_0) + (y - y_0)\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x_0 = (x - x_0)\cos\dfrac{\pi}{6} - (y - y_0)\sin\dfrac{\pi}{6} \\ y' - y_0 = (x - x_0)\sin\dfrac{\pi}{6} + (y - y_0)\cos\dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

Suy ra: f là phép quay tâm I(x_0 ; y_0) với $\begin{cases} x_0 = \dfrac{4-\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}} \\ y_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ và góc quay $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$.

b) Ta có: $\begin{cases} x' = x\cos\dfrac{\pi}{6} - y\sin\dfrac{\pi}{6} + 1 \\ y' = x\sin\dfrac{\pi}{6} + y\cos\dfrac{\pi}{6} - 2 \end{cases}$

nên f là tích của phép quay Q (O ; $\dfrac{\pi}{6}$): M(x ; y) → M'(x' ; y')

và phép tịnh tiến $T_{\vec{v}} : M'(x' ; y') \to M''(x'' ; y'')$ với $\vec{v} = (1 ; -2)$

Biểu thức giải tích của phép quay Q (O ; $\dfrac{\pi}{6}$)

$$\begin{cases} x' = x\cos\dfrac{\pi}{6} - y\sin\dfrac{\pi}{6} \\ y' = x\sin\dfrac{\pi}{6} + y\cos\dfrac{\pi}{6} \end{cases} = \begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{1}{2}y \\ y' = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y \end{cases}$$

Biểu thức giải tích của phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$: $\begin{cases} x'' = x' + 1 \\ y'' = y' - 2 \end{cases}$

Bài 14. a) Biểu thức giải tích của phép quay Q (O ; $\frac{\pi}{4}$)

$$\begin{cases} x' = x\cos\frac{\pi}{4} - y\sin\frac{\pi}{4} \\ y' = x\sin\frac{\pi}{4} + y\cos\frac{\pi}{4} \end{cases} = \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases}$$

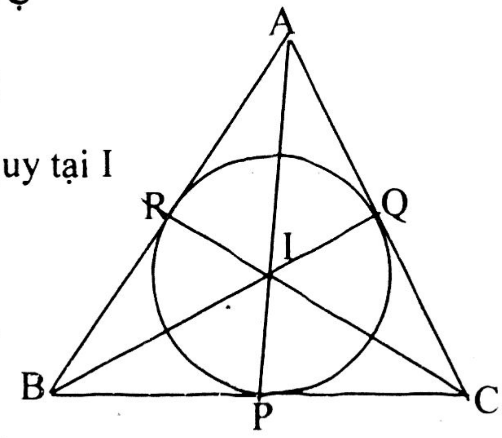
b) Đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 6x + 6y + 14 = 0$ có tâm I(3 ; – 3), bán kính R = 2

Q (O ; $\frac{\pi}{4}$): I(3 ; – 3) → I '(x' ; y') thì $\begin{cases} x' = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \\ y' = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} = 0 \end{cases}$

Q (O ; $\frac{\pi}{4}$): (C) → (C ')

Phương trình của đường tròn (C ') là: $(x - 3\sqrt{2})^2 + y^2 = 4$.

§ 4. PHÉP VỊ TỰ



Bài 1. a) Ta có: BP = BR, CP = CQ, AQ = AR

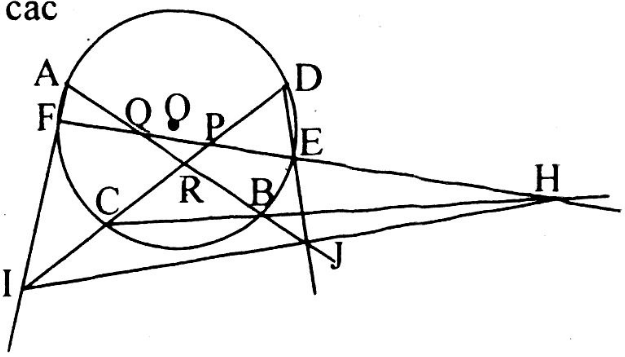
$\Rightarrow \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1 \Rightarrow$ AP, BQ, CR đồng quy tại I

(Theo định lý Ceva)

b) Ta có $\frac{PI}{PA} = \frac{dt(\Delta BIC)}{dt(\Delta BAC)}$; $\frac{QI}{QB} = \frac{dt(\Delta AIC)}{dt(\Delta ABC)}$

và $\frac{RI}{RC} = \frac{dt(\Delta AIB)}{dt(\Delta ACB)}$

$$\Rightarrow \frac{\overline{PI}}{\overline{PA}} + \frac{\overline{QI}}{\overline{QB}} + \frac{\overline{RI}}{\overline{RC}} = \frac{dt(\Delta BIC) + dt(\Delta AIC) + dt(\Delta AIB)}{dt(\Delta BAC)} = \frac{dt(\Delta ABC)}{dt(\Delta BAC)} = 1.$$



Bài 2. Áp dụng định lý Menelauyt cho các đường thẳng trong tam giác PQR.

Đường thẳng IFA: $\frac{\overline{IP}}{\overline{IR}} \cdot \frac{\overline{AR}}{\overline{AQ}} \cdot \frac{\overline{FQ}}{\overline{FP}} = 1$

Đường thẳng JED: $\frac{\overline{JR}}{\overline{IR}} \cdot \frac{\overline{EQ}}{\overline{EP}} \cdot \frac{\overline{DP}}{\overline{DR}} = 1$

Đường thẳng HBC: $\frac{\overline{HQ}}{\overline{HP}}\frac{\overline{CP}}{\overline{CR}}\frac{\overline{BR}}{\overline{BQ}}=1$

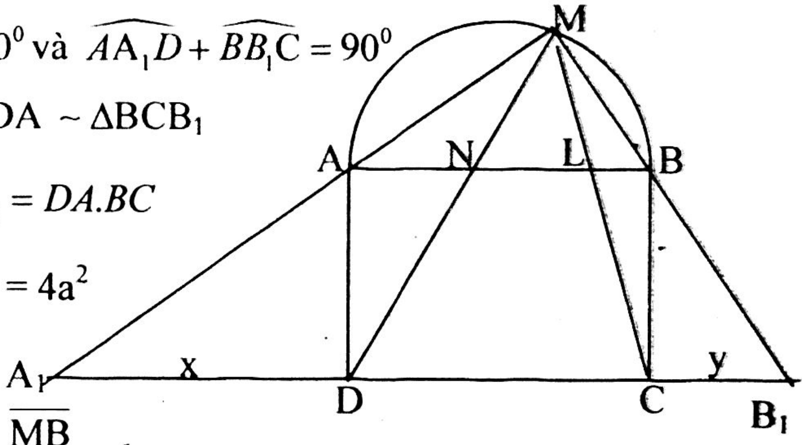
Mặt khác, theo tính chất của phương tích đối với đường tròn (O):

$\overline{AR}\,\overline{BR}=\overline{CR}\,\overline{DR}$; $\overline{FQ}\,\overline{EQ}=\overline{AQ}\,\overline{BQ}$; $\overline{CP}\,\overline{DP}=\overline{FP}\,\overline{EP}$

Suy ra: $\frac{\overline{IP}}{\overline{IR}}\frac{\overline{AR}}{\overline{AQ}}\frac{\overline{FQ}}{\overline{FP}}\frac{\overline{JR}}{\overline{IR}}\frac{\overline{EQ}}{\overline{EP}}\frac{\overline{DP}}{\overline{DR}}\frac{\overline{HQ}}{\overline{HP}}\frac{\overline{CP}}{\overline{CR}}\frac{\overline{BR}}{\overline{BQ}}=1\Rightarrow\frac{\overline{IP}}{\overline{IR}}\frac{\overline{JR}}{\overline{JQ}}\frac{\overline{HQ}}{\overline{HP}}=1\Rightarrow$ I, J, H thẳng hàng.

Bài 3. Gọi A_1, B_1 là giao điểm của AM, BN với DC

Đặt $A_1D = x$ và $B_1C = y$



Ta có: $\widehat{AA_1D}+\widehat{A_1AD}=90^0$ và $\widehat{AA_1D}+\widehat{BB_1C}=90^0$

$\Rightarrow\widehat{A_1AD}=\widehat{BB_1C}\Rightarrow\Delta A_1DA\sim\Delta BCB_1$

$\Rightarrow\frac{A_1D}{BC}=\frac{DA}{CB_1}\Rightarrow A_1D.CB_1=DA.BC$

$\Leftrightarrow xy=BC^2=2a^2\Leftrightarrow 2xy=4a^2$

Ta có: $AB\,//\,A_1B_1$

$\Rightarrow\frac{MA}{MA_1}=\frac{MB}{MB_1}\Rightarrow\frac{\overline{MA}}{\overline{MA_1}}=\frac{\overline{MB}}{\overline{MB_1}}=k.$

Phép vị tự V(M ; k): D → N, C → L, A_1 → A, B_1 → B

$\Rightarrow\overrightarrow{AL}=k\overrightarrow{A_1C}$; $\overrightarrow{BN}=k\overrightarrow{B_1D}$ $\Rightarrow AL^2=k^2A_1C^2$ và $BN^2=k^2B_1D^2$.

$$AL^2+BN^2=k^2(A_1C^2+B_1D^2)=\left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2\left[(x+AB)^2+(y+AB)^2\right]$$

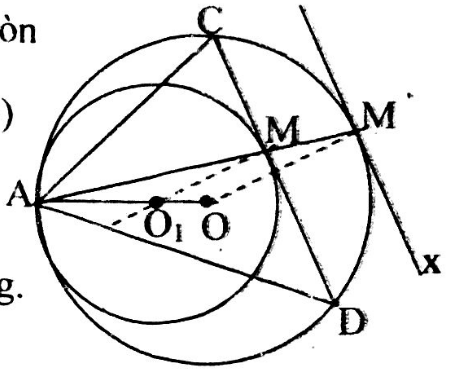
$$(x+AB)^2+(y+AB)^2=2AB^2+x^2+y^2+2AB(x+y)$$

$$(A_1B_1)^2=(x+y+AB)^2=AB^2+(x+y)^2+2AB(x+y)$$

$$=AB^2+x^2+y^2+2xy+2AB(x+y)=2AB^2+x^2+y^2+2AB(x+y)$$

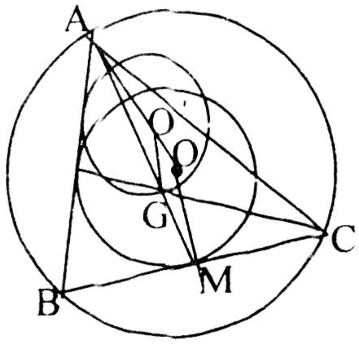
Suy ra: $AL^2+BN^2=AB^2=4a^2$.

Bài 4. Gọi R, R_1 lần lượt là bán kính của đường tròn (O), (O_1). Xét phép vị tự $V\left(A;\frac{R}{R_1}\right)$: $(O_1)\to(O)$



$\Rightarrow V\left(A;\frac{R}{R_1}\right)$: $M\to M'\Rightarrow$ A, M, M' thẳng hàng.

Tiếp tuyến CD của đường tròn (O_1) tại M thành tiếp tuyến $M'x$ của đường tròn (O) tại $M' \Rightarrow CD \,//\, M'x \Rightarrow \overset{\frown}{CM'} = \overset{\frown}{DM'} \Rightarrow \widehat{DAM} = \widehat{CAM}$.



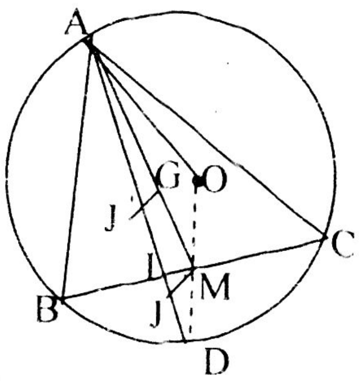
Bài 5. a) T acó: $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ và OM $=$ $\sqrt{R^2 - a^2}$ nên M thuộc đường tròn tâm O, bán kính $r = \sqrt{R^2 - a^2}$.

Suy ra: $V\left(A; \dfrac{2}{3}\right)$: $(O\,;\,r) \rightarrow (O'\,;\,r')$ với $r' = \dfrac{2}{3}\sqrt{R^2 - a^2}$

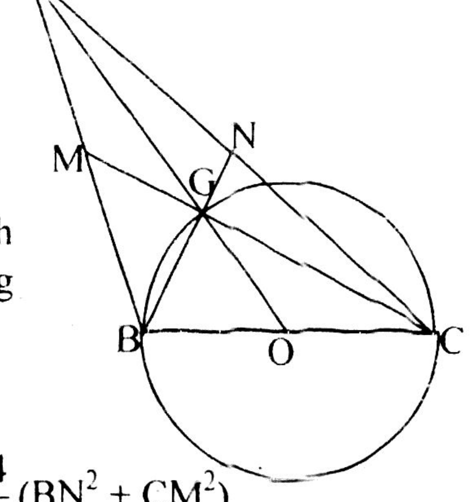
Vậy quỹ tích của G là đường tròn $(O'\,;\,r')$.

b) Ta có AD phân giác $\widehat{BAC} \Rightarrow \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CD} \Rightarrow OD \perp BC$ tại M

$\Rightarrow \widehat{IMD} = 90^0$ nên M thuộc đường tròn đường kính ID. Gọi (C) là đường tròn đường kính ID và (C') là ảnh của (C) qua $V\left(A; \dfrac{2}{3}\right)$ thì quỹ tích của G là đường tròn (C') có tâm là J', ảnh của J (J trung điểm ID) qua $V\left(A; \dfrac{2}{3}\right)$.



Bài 6.



a) Gọi G là trọng tâm ΔABC, ta có: $\overrightarrow{OA} = 3\overrightarrow{OG}$

$\Rightarrow$ V(O ; 3): G $\rightarrow$ A.

Ta có $BN \perp CM \Rightarrow \widehat{BOC} = 90^0$

$\Rightarrow$ G thuộc đường tròn (O), tâm O, đường kính BC nên: V(O ; 3): (O) $\rightarrow$ (O'), (O') là đường tròn tâm O, bán kính OA = 3OG.

Vậy quỹ tích điểm A là đường tròn (O').

b) Trong Δ BGC: $BC^2 = BG^2 + CG^2$

$BG = \dfrac{2}{3}BN$ và $CG = \dfrac{2}{3}CM \Rightarrow BG^2 + CG^2 = \dfrac{4}{9}(BN^2 + CM^2)$

Áp dụng công thức trung tuyến:

$$BN^2 = \frac{BA^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4}\,;\; CM^2 = \frac{CA^2 + BC^2}{2} - \frac{AB^2}{4}$$

$$BG^2 + CG^2 = \frac{4}{9}\left(\frac{BA^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4} + \frac{CA^2 + BC^2}{2} - \frac{BA^2}{4}\right)$$

$$= \frac{4}{9}\left(\frac{AB^2}{4} + \frac{AC^2}{4} + BC^2\right) = BC^2 \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = 5BC^2.$$

Bài 7.

a) Ta có: Δ AMP, Δ BMQ đều $\Rightarrow \widehat{PAM} = \widehat{QBM} = 60^0$

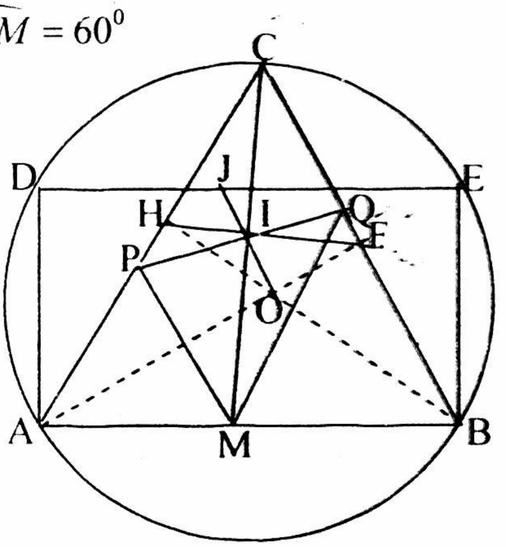
$\Rightarrow \Delta$ ABC đều $\Rightarrow$ CQ // PM và CP // QM (có cặp góc đồng vị bằng nhau).

$\Rightarrow$ Tứ giác CPMQ là hình bình hành

$\Rightarrow$ I là trung điểm CM $\Rightarrow \overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CM}$

Mặt khác ta có AB cố định nên C cố định.

$V\left(C;\frac{1}{2}\right)$: M $\to$ I $\Rightarrow V\left(C;\frac{1}{2}\right)$: $\overrightarrow{AB} \to \overrightarrow{HF}$



Suy ra, quỹ tích của điểm I là đoạn thẳng HF, HF // AB và HF = $\frac{1}{2}$AB.

b) Ta có tứ giác CPMQ là hình bình hành nên ΔCPQ và ΔMQP đối xứng nhau qua tâm I của hình bình hành CPMQ. Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔCPQ và O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Ta có đường trung trực của BC cũng là đường trung trực của MP và đường trung trực của AC cũng là đường trung trực của MQ suy ra O cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔMQP nên O cố định và $\overrightarrow{OJ} = 2\overrightarrow{OI}$

$\Rightarrow$ V(O ; 2): I $\to$ J

$\Rightarrow$ V(O ; 2): $\overrightarrow{HF} \to \overrightarrow{DE}$ $\Rightarrow$ Quỹ tích của điểm J là đoạn thẳng DE, DE = 2HF và DE // HF $\Rightarrow$ DE = AB và DE // AB.

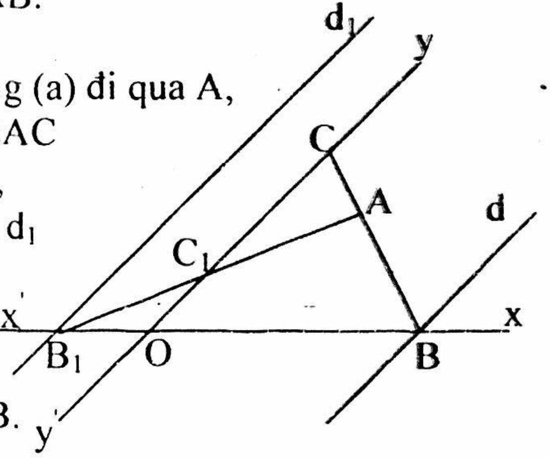
Bài 8.

Phân tích: Giả sử dựng được đường thẳng (a) đi qua A, cắt $x'Ox$, $y'Oy$ tại B và C sao cho AB = 2AC

Suy ra: B, B_1 là ảnh của A qua V (A;– 2), V(A; 2). Suy ra B, B_1 là giao điểm của d, d_1 với $x'Ox$.

Cách dựng:

– Dựng đường thẳng d là ảnh của $y'Oy$ qua V (A;– 2) cắt đường thẳng $x'Ox$ tại B.



– Dựng đường thẳng AB.

– Dựng đường thẳng d_1 là ảnh của $y'Oy$ qua V (A; 2) cắt đường thẳng $x'Ox$ tại B_1

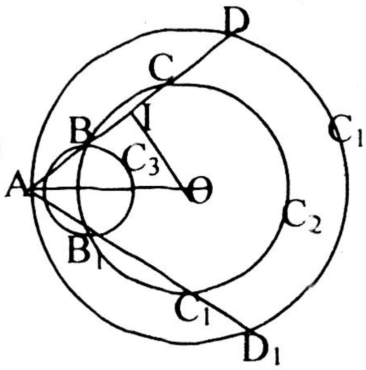
– Dựng đường thẳng AB_1.

Chứng minh: Theo cách dựng, gọi C là giao điểm của đường thẳng AB với $y'Oy$

$\Rightarrow$ V (A;– 2): C $\to$ B $\Rightarrow$ AB = 2AC

Biện luận: Bài toán có hai nghiệm hình.

Bài 9.



Phân tích: Giả sử dựng được đường thẳng đi qua A, cắt hai đường tròn (C_1), (C_2) sao cho AB = BC = CD

$\Rightarrow AB = \frac{1}{2}AC$

$\Rightarrow V\left(A;\frac{1}{2}\right): C \to B$ mà B, C thuộc (C_2)

nên B là giao điểm của đường tròn (C_3) ảnh của (C_2) qua $V\left(A;\frac{1}{2}\right)$.

Cách dựng: – Dựng đường tròn (C_3) ảnh của (C_2) qua $V\left(A;\frac{1}{2}\right)$.

– Đường tròn (C_3) cắt đường tròn (C_2) tại hai điểm B, B_1

– Dựng các đường thẳng AB, AB_1.

Chứng minh: Gọi C, D lần lượt là các giao điểm thứ hai của đường thẳng AB với (C_2), (C_1). Theo cách dựng, ta có: $V\left(A;\frac{1}{2}\right): C \to B \Rightarrow AB = \frac{1}{2}AC \Rightarrow AB = BC$.

Gọi I là trung điểm của BC thì I cũng là trung điểm của AD (Do (C_1), (C_2) là hai đường tròn đồng tâm) $\Rightarrow$ AB = CD.

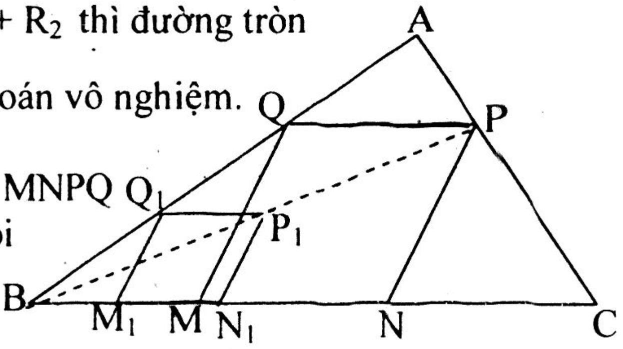
Biện luận: Gọi R_1, R_2 là bán kính của đường tròn (C_1), (C_2) và O, O_3 là tâm của (C_1), (C_3). Ta có $R_3 = \frac{1}{2}R_2$ và $AO_3 = \frac{1}{2}AO$, $OO_3 = \frac{1}{2}R_1$.

– Nếu $R_1 < 3R_2 \Rightarrow OO_3 < \frac{3}{2}R_2 = R_3 + R_2$ nên đường tròn (C_3) cắt đường tròn (C_2) tại hai điểm, bài toán có hai nghiệm hình.

– Nếu $R_1 = 3R_2 \Rightarrow OO_3 = \frac{3}{2}R_2 = R_3 + R_2$ thì nên đường tròn (C_3) tiếp xúc với đường tròn (C_2) tại B, bài toán có một nghiệm hình. Đường thẳng đi qua hai điểm A và O.

– Nếu $R_1 > 3R_2 \Rightarrow OO_3 = \frac{3}{2}R_2 > R_3 + R_2$ thì đường tròn (C_3) không cắt đường tròn (C_2). Bài toán vô nghiệm.

Bài 10



Phân tích: Giả sử dựng được hình thoi MNPQ thoả mãn yêu cầu bài toán. Xét hình thoi

$M_1N_1P_1Q_1$ với $\widehat{Q_1M_1N_1} = 60^0$ và cạnh M_1N_1 nằm trên cạnh BC, đỉnh Q_1 thuộc cạnh AB.

Suy ra: P_1, P thuộc đường phân giác góc $\widehat{ABC}$. Phép vị tự $V\left(B; \dfrac{MN}{M_1N_1}\right)$: $M_1N_1P_1Q_1 \to MNPQ$.

Cách dựng

- Lấy một điểm tuỳ ý Q_1 trên cạnh AB.
- Dựng góc $\widehat{Q_1M_1N_1} = 60^0$ với M_1 thuộc cạnh BC.
- Dựng hình thoi $M_1N_1P_1Q_1$ với N_1 thuộc cạnh BC.
- Dựng tia BP_1 cắt cạnh AC tại P.
- Dựng đường thẳng qua P, song song với BC, cắt cạnh AB tại Q.
- Dựng đường thẳng qua P, song song với Q_1M_1, cắt cạnh BC tại N.
- Dựng đường thẳng qua Q, song song với Q_1M_1, cắt cạnh BC tại M.
- Hình thoi MNPQ dựng được.

Chứng minh: Theo cách dựng, tứ giác MNPQ là ảnh của hình thoi $M_1N_1P_1Q_1$ qua $V\left(B; \dfrac{BP}{BP_1}\right)$ nên MNPQ là hình thoi và $\widehat{QMN} = 60^0$, P thuộc cạnh AC và Q thuộc cạnh AB.

Biện luận: Theo cách dựng ta có $\widehat{MNP} = 120^0$.

Nếu $\widehat{ACB} \le 120^0$ thì điểm N thuộc cạnh BC, bài toán có một nghiệm hình.

Nếu $\widehat{ACB} > 120^0$ thì điểm N không thuộc cạnh BC, bài toán vô nghiệm.

Bài 11.

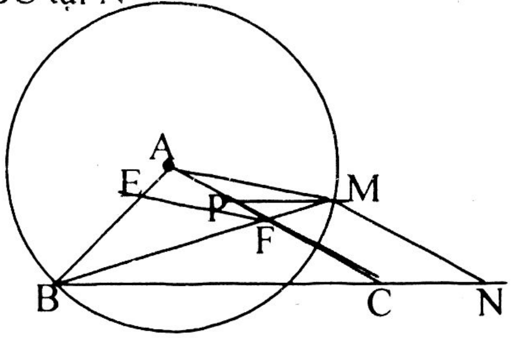
Phân tích: Giả sử dựng được hai điểm E, F trên cạnh AB, AC sao cho BE = EF = FC.

Qua A kẻ đường thẳng song song EF, cắt BF tại M

Qua M kẻ đường thẳng song song AC, cắt BC tại N

Ta có: $\dfrac{BE}{BA} = \dfrac{EF}{AM} = \dfrac{BF}{BM} = \dfrac{FC}{MN} = \dfrac{BC}{BN}$

$\Rightarrow AB = AM = MN$.



Cách dựng:

- Dựng đường tròn tâm A, bán kính AB.
- Trên tia CA lấy điểm P sao cho CP = AB.
- Dựng đường thẳng đi qua P, song song với BC, cắt đường tròn tâm A tại M.
- Dựng đường thẳng BM cắt AC tại F.
- Dựng đường thẳng đi qua F, song song với AM cắt AB tại E.

Chứng minh: Theo cách dựng, tứ giác BEFC là ảnh của tứ giác BAMN qua phép vị tự $V\left(B;\dfrac{BF}{BM}\right)$. Mặt khác AB = AM = MN $\Rightarrow$ BE = EF = FC.

Biện luận: Nếu AC < AB thì điểm F không thuộc cạnh AC, bài toán không có nghiệm hình.
Nếu AC > AB thì điểm F thuộc cạnh AC, bài toán có một nghiệm hình.

Bài 12: Biểu thức giải tích của phép vị tự tâm O, tỉ số k = $\frac{1}{2}$ là: $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x \\ y' = \dfrac{1}{2}y \end{cases}$

Suy ra: x = 2x' và y =2y'.

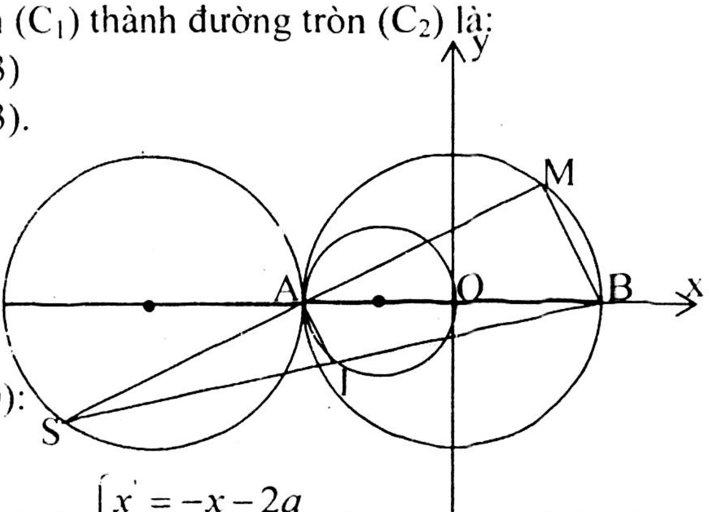
a) Đường thẳng d' là ảnh của đường thẳng d qua phép vị tự tâm O, tỉ số k = $\frac{1}{2}$ có phương trình: 6x – 4y + 1 = 0.

b) Phương trình đường tròn (C'): $x^2 + y^2 - x - 2y + \frac{1}{4} = 0$.

c) Phương trình đường cong (S'): $y = \dfrac{4x+1}{2-4x}$.

Bài 13. Phép vị tự biến đường tròn (C_1) thành đường tròn (C_2) là:
*) Tỉ số k = 2, tâm vị tự I (– 2 ; 3)
*) Tỉ số k = – 2, tâm vị tự I (2 ; 3).

Bài 14.



a) Phép vị tự V(A ; – 1): M → S
Quỹ tích của S là đường tròn (O_1), ảnh của đường tròn (O) qua V(A ; – 1)
Phương trình của đường tròn (O): $x^2 + y^2 = a^2$

Biểu thức giải tích của V(A ; – 1) là $\begin{cases} x' = -x - 2a \\ y' = -y \end{cases}$ nên phương trình của đường tròn (O_1): $(x + 2a)^2 + y^2 = a^2$ (*)

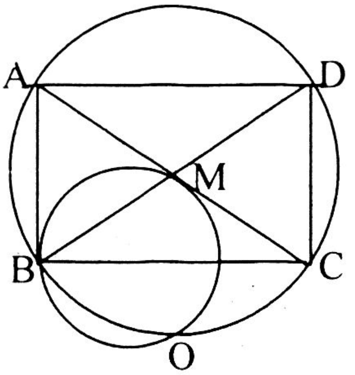
b) Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ASB là trung điểm I của SB

Ta có: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{x_S + a}{2} \\ y_I = \dfrac{y_S}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_S = 2x_I - a \\ y_S = 2y_I \end{cases}$

thay vào (*) ta có: $(2x_I + a)^2 + (2y_I)^2 = a^2$

Phương trình quỹ tích điểm I: $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}$.

§ 5. PHÉP ĐỒNG DẠNG



Bài 1. Ta có: $DB^2 = a^2 + 4a^2 = 5a^2 \Rightarrow DB = a\sqrt{5}$

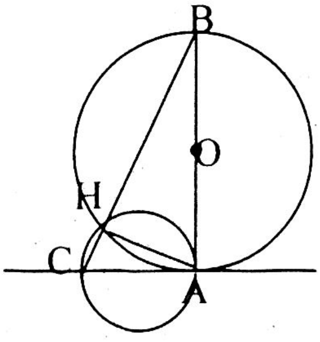
$\Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow DM = \frac{\sqrt{5}}{2}AB$

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM}) = (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DM}) = \varphi$ với $|\tan\varphi| = \frac{2a}{a} = 2$

nên φ không đổi.

Suy ra: $\overrightarrow{DM}$ là ảnh của $\overrightarrow{AB}$ qua phép đồng dạng tâm O, tỉ số $k = \frac{\sqrt{5}}{2}$, góc φ.

Tâm O là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác BAD và đường tròn đi qua B, M và tiếp xúc với AB tại B.

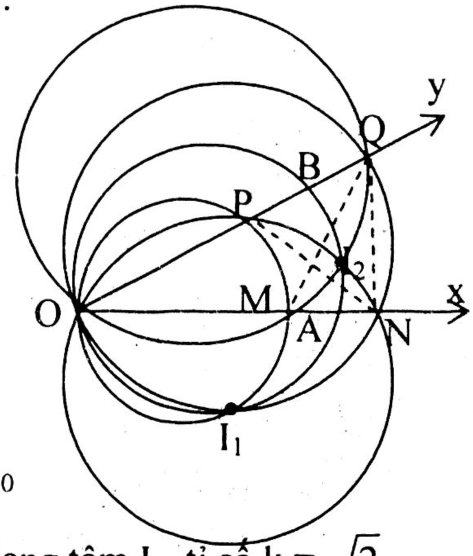


Bài 2. Ta có: $CA = \frac{1}{2}BC \Rightarrow AB = \sqrt{3}\,CA$

$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}) = 90^0$.

Suy ra: $\overrightarrow{AB}$ là ảnh của $\overrightarrow{CA}$ qua phép đồng dạng tâm H, tỉ số $k = \sqrt{3}$, góc $\varphi = 90^0$. Tâm H là giao điểm thứ hai của đường tròn đi qua C và tiếp xúc với AB tại A và đường tròn đi qua B và tiếp xúc với AC tại A.

Bài 3.



a)* Phép đồng dạng biến $\overrightarrow{MN}$ thành $\overrightarrow{PQ}$

Ta có: $PQ = \sqrt{2}$ MN và $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}) = 45^0$

Suy ra: $\overrightarrow{PQ}$ là ảnh của $\overrightarrow{MN}$ qua phép đồng dạng tâm I_1, tỉ số $k = \sqrt{2}$, góc $\varphi = 45^0$. Tâm I_1 là giao điểm thứ hai của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác OMP, ONQ.

* Phép đồng dạng biến $\overrightarrow{MN}$ thành $\overrightarrow{QP}$

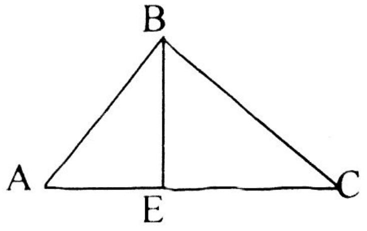
Ta có: $QP = \sqrt{2}$ MN và $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{QP}) = -135^0$

Suy ra: $\overrightarrow{QP}$ là ảnh của $\overrightarrow{MN}$ qua phép đồng dạng tâm I_2, tỉ số $k = \sqrt{2}$, góc $\varphi = -135^0$. Tâm I_2 là giao điểm thứ hai của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác OMQ, ONP.

b) Ta có: $Z(O;\sqrt{2};45^0)$: $\overrightarrow{MN} \to \overrightarrow{PQ} \Rightarrow Z(O;\sqrt{2};45^0)$: A → B

$Z(O;\sqrt{2};-135^0)$: $\overrightarrow{MN} \to \overrightarrow{QP} \Rightarrow Z(O;\sqrt{2};-135^0)$: A → B

Suy ra: I_1, I_2 nằm trên đường tròn cố định ngoại tiếp tam giác OAB.



Bài 4. Ta có: $\Delta BEC \sim \Delta AEB \Rightarrow \dfrac{EB}{EA} = \dfrac{EC}{EB} = \dfrac{BC}{AB}$

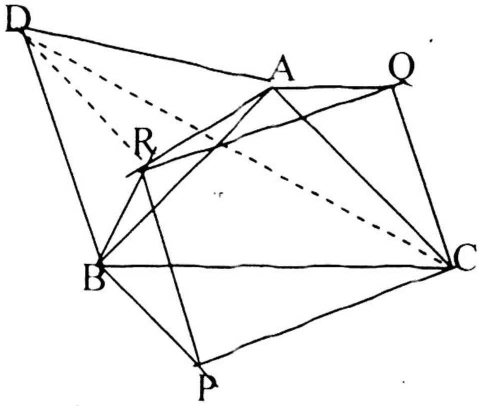
Và $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}) = -90^0$

Suy ra: Phép đồng dạng

$$Z\left(E;\frac{EB}{EA};-90^0\right) = V\left(E;\frac{EB}{EA}\right)\circ Q\left(E;-90^0\right)$$

biến A → B, B → C ⇒ $Z\left(E;\dfrac{EB}{EA};-90^0\right)$: $\Delta AEB \to \Delta BEC$.

Bài 5. Dựng phía ngoài tam giác ABC, tam giác đều ABD. Ta có: $\Delta ADR \sim \Delta ACQ \Rightarrow \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AR}{AQ}$



$$\Rightarrow \frac{AR}{AD} = \frac{AQ}{AC} = k$$

$$\Rightarrow Z_A = V(A;k)\circ Q(A;45^0):$$

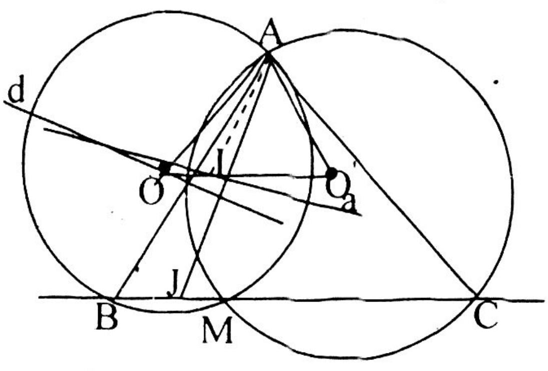
DC → RQ và $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{RQ}) = 45^0$

Tương tự: $\Delta BRD \sim \Delta BPC \Rightarrow \dfrac{BR}{BP} = \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{RD}{PC}$

$\Rightarrow \dfrac{BP}{BC} = \dfrac{BR}{BD} = k_1 \Rightarrow Z_B = V(B;k_1)\circ Q(B;-45^0)$: DC → RP và $(\overrightarrow{RP}, \overrightarrow{DC}) = 45^0$

Ta có: $k_1 = \dfrac{BP}{BC} = \dfrac{BR}{BD} = \dfrac{AR}{AD} = \dfrac{AQ}{AC} = k \Rightarrow RQ = RP$

$(\overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RQ}) = (\overrightarrow{RP}, \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{RQ}) = 45^0 + 45^0 = 90^0 \Rightarrow RP \perp RQ$



Bài 6. a) Ta có: $\widehat{AOO'} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOM}$

và $\widehat{ABC} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOM} \Rightarrow \widehat{AOO'} = \widehat{ABC}$

Tương tự: $\widehat{AO'O} = \widehat{ACB}$

$\Rightarrow \Delta AOO' \sim \Delta ABC$

b) Gọi J là điểm trên cạnh BC sao cho

$$\frac{\overline{JB}}{\overline{JC}} = \frac{\overline{IO}}{\overline{IO'}} \Rightarrow \frac{JC}{JB} = \frac{IO'}{IO} \Rightarrow \frac{JC+JB}{JB} = \frac{IO'+IO}{IO} \Rightarrow \frac{CB}{JB} = \frac{OO'}{IO}$$

$\Rightarrow \frac{OI}{BJ} = \frac{OO'}{BC}$. Ta có: $\Delta AOO' \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AO}{AB} = \frac{OO'}{BC} \Rightarrow \frac{OI}{BJ} = \frac{OA}{BA}$

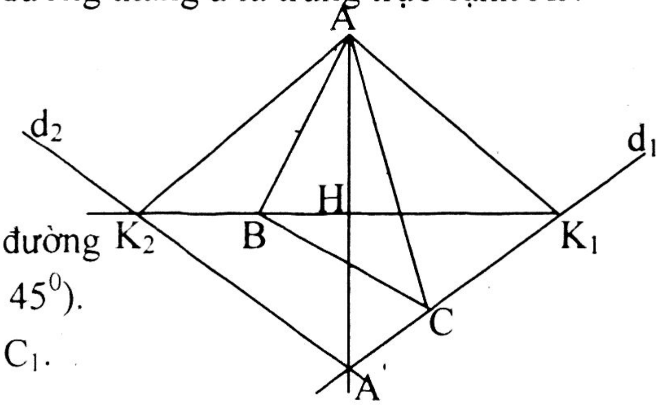
$\widehat{AOI} = \widehat{ABJ} \Rightarrow \Delta AOI \sim \Delta ABJ \Rightarrow \widehat{OAI} = \widehat{BAJ}$ và $\frac{AO}{AB} = \frac{AI}{AJ} \Rightarrow \frac{AJ}{AB} = \frac{AI}{AO}$

$\Rightarrow \Delta OAB \sim \Delta IAJ \Rightarrow$ tồn tại phép đồng dạng Z_A: $\Delta OAB \rightarrow \Delta IAJ$.

Tam giác ΔOAB cân tại O nên O thuộc đường thẳng d là trung trực cạnh AB.

Suy ra: Δ IAJ cân tại I nên I thuộc đường thẳng a là trung trực cạnh AJ.

Bài 7. a) Quỹ tích điểm C



Ta có: ΔABC vuông cân tại B nên

$AC = \sqrt{2}\,AB$ và $(AB, AC) = 45^0$

$\Rightarrow Z(A\ ;\ \sqrt{2}\ ;\ 45^0)$: B → C

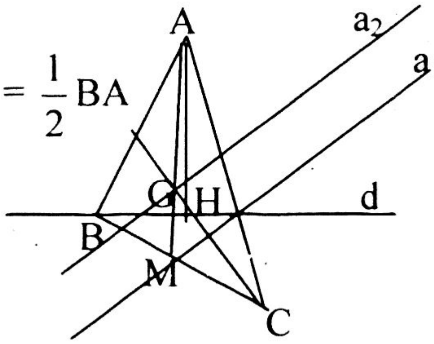
B thuộc đường thẳng d nên C thuộc đường thẳng d_1, ảnh của d qua $Z(A\ ;\ \sqrt{2}\ ;\ 45^0)$.

Tương tự: $Z(A\ ;\ \sqrt{2}\ ;\ -45^0)$: $B \rightarrow C_1$.

Suy ra C_1 thuộc đường thẳng d_2, ảnh của d qua $Z(A\ ;\ \sqrt{2}\ ;\ -45^0)$.

Vậy, quỹ tích của C là hai đường thẳng d_1, d_2.

b) Quỹ tích của điểm G.



Gọi M là trung điểm của BC, ta có $BM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}BA$

$\tan\widehat{BAM} = \frac{BM}{BA} = \frac{1}{2} = \tan\varphi \Rightarrow \varphi = \arctan\frac{1}{2}$

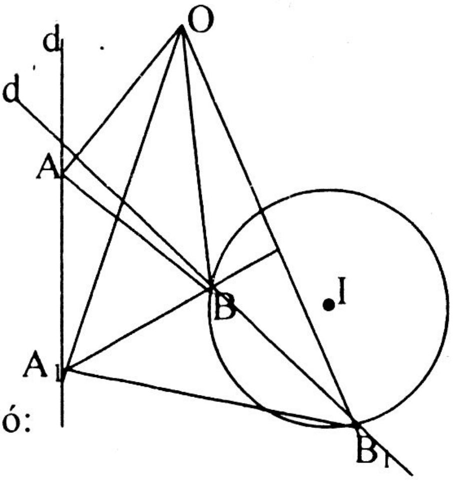
$AM = \frac{1}{\cos\varphi}AB \Rightarrow Z(A\ ;\frac{1}{\cos\varphi}\ ;\ \varphi)$: B → M

Suy ra, M thuộc đường thẳng a_1, ảnh của đường thẳng d qua phép đồng dạng trên.

Mặt khác: $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} \Rightarrow V\left(A;\frac{2}{3}\right)$: M → G.

Suy ra, G thuộc đường thẳng a_2, ảnh đường thẳng a_1 qua phép vị tự $V\left(A;\frac{2}{3}\right)$.

Quỹ tích điểm G là đường thẳng a_2.



Bài 8. Phân tích: Giả sử dựng được ΔABO vuông cân tại A thoả mãn yêu cầu bài toán. Ta có:

$OB = \sqrt{2}\,OA$ và $(OA, OB) = 45^0$

$\Rightarrow Z(O\ ;\ \sqrt{2}\ ;\ 45^0)$: A → B.

Cách dựng:

– Dựng đường thẳng d', ảnh của d qua Z(O ; $\sqrt{2}$; 45^0)

– Dựng điểm B là giao điểm của đường thẳng d' và đường tròn (C).

– Dựng điểm A là ảnh của B qua Z(O ; $\frac{1}{\sqrt{2}}$; – 45^0).

– Tam giác ABC dựng được.

Chứng minh: Theo cách dựng ta có A∈ d và $\widehat{AOB} = 45^0$, OB = $\sqrt{2}$ OA
Ta chứng minh AB = AO ⇒ ΔABO vuông cân tại A.

Biện luận

– Nếu d' không cắt (C) thì bài toán không có nghiệm hình.

– Nếu d' cắt (C) tại hai điểm thì bài toán có hai nghiệm hình.

– Nếu d' tiếp xúc với (C) thì bài toán có một nghiệm hình.

Bài 9. a) Ta có: f: M(x ; y) → M'(x' ; y') nên

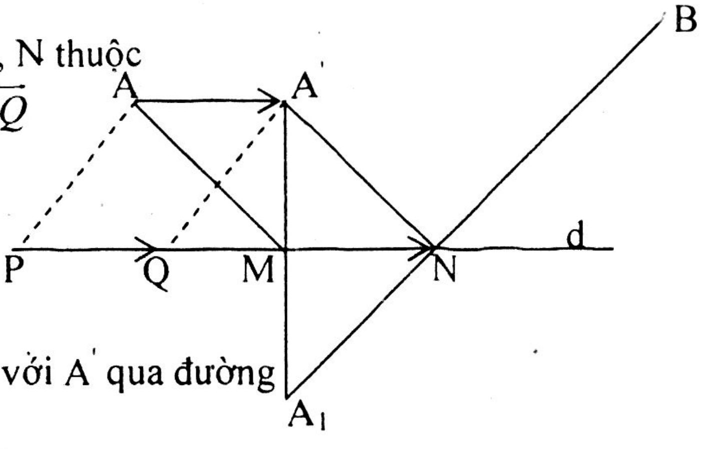
$$\begin{cases} x' = 2\left(x-\sqrt{3}y\right) \\ y' = 2\left(\sqrt{3}x+y\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 4\left(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}y\right) \\ y' = 4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{1}{2}y\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 4\left(x\cos\dfrac{\pi}{3}-y\sin\dfrac{\pi}{3}\right) \\ y' = 4\left(x\sin\dfrac{\pi}{3}+y\cos\dfrac{\pi}{3}\right) \end{cases}$$

Nên f = $Z\left(O;4;\frac{\pi}{3}\right)$ là phép đồng dạng, tâm O, tỉ số k = 4 và góc $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

b) Phương trình của đường thẳng d': $x(2-\sqrt{3})+y(2\sqrt{3}-1)-4=0$.

ÔN TẬP CHƯƠNG I

Bài 1.



Phân tích: Giả sử dựng được M, N thuộc đường thẳng d sao cho: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$

Lấy điểm A' sao cho $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{PQ}$

Suy ra:
Tứ giác AMNA' là hình bình hành.
⇒ AM = A'N. Gọi A_1 đối xứng với A' qua đường thẳng d thì A'N = A_1N
⇒ AM + BN = A_1N + BN ≥ A_1B
⇒ AM + BN nhỏ nhất khi N là giao điểm của hai đường thẳng d và A_1B.

Cách dựng

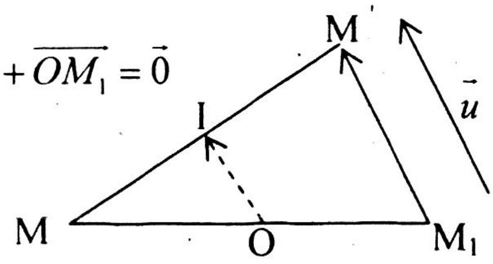
- Dựng điểm $A^{'}$ sao cho $\overrightarrow{AA^{'}} = \overrightarrow{PQ}$.
- Dựng điểm A_1 đối xứng với A qua đường thẳng d.
- Dựng điểm N là giao điểm của hai đường thẳng d và A_1B.
- Dựng đường thẳng đi qua A, song song $A^{'}N$ và cắt đường thẳng d tại M.

Chứng minh: Theo cách dựng ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AA^{'}}$ và $\overrightarrow{AA^{'}} = \overrightarrow{PQ} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$

Mặt khác: $AM + BN = A^{'}N + BN = A_1N + BN = A_1B$ nhỏ nhất.

Biện luận: Bài toán có một nghiệm hình.

Bài 2.



a) Xét phép đối xứng tâm D_O: $M \rightarrow M_1 \Rightarrow \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM_1} = \vec{0}$

Phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$: $M_1 \rightarrow M^{'} \Rightarrow \overrightarrow{M_1M^{'}} = \vec{u}$.

Suy ra: $F = T_{\vec{u}} \circ D_O$: M
→ $M^{'}$ là một phép dời hình.

b) Gọi I là trung điểm của $MM^{'}$, ta có: $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IM^{'}} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M^{'}} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{M_1M^{'}} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\vec{u}$$

Suy ra, I là điểm cố định. $F = T_{\vec{u}} \circ D_O = D_I$: $M \rightarrow M^{'}$ là một phép đối xứng tâm I

Bài 3.

a) Ta có: $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AM_1} = \vec{0}$

$\overrightarrow{BM_1} + \overrightarrow{BM_2} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{CM_2} + \overrightarrow{CM_3} = \vec{0}$

Gọi I là trung điểm của MM_3 thì $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IM_3} = \vec{0}$

$\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CM_2} + \overrightarrow{M_2M_1} + \overrightarrow{M_1M}$ và $\overrightarrow{IM_3} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CM_3}$

Suy ra: $2\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{M_2M_1} + \overrightarrow{M_1M} = \vec{0}$

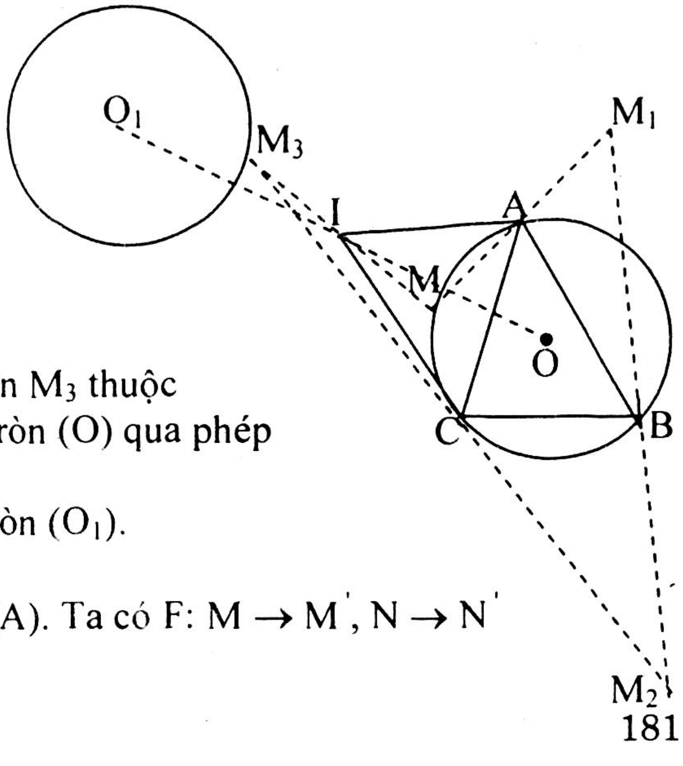
$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IC} + 2\overrightarrow{BM_1} + 2\overrightarrow{M_1A} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{BM_1} + \overrightarrow{M_1A} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{BA} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{BA}$

Suy ra điểm I cố định.

$\Rightarrow D_I = D_C \circ D_B \circ D_A$: $M \rightarrow M_3$.



b) Ta có M thuộc đường tròn (O) nên M_3 thuộc đường tròn (O_1), ảnh của đường tròn (O) qua phép đối xứng tâm I.

Quỹ tích các điểm M_3 là đường tròn (O_1).

Bài 4.

Lấy điểm A bất kỳ có ảnh $A^{'} = F(A)$. Ta có F: $M \rightarrow M^{'}$, $N \rightarrow N^{'}$

Suy ra: $\overrightarrow{A'M'} = k\overrightarrow{AM}$.

* Khi k = 1 thì $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN} \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'} \Rightarrow F = T_{AA'}$.

* Khi k ≠1, nếu có điểm cố định O sao cho $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'M'} = k(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}) = k\overrightarrow{OM} \Rightarrow F = V(O\,;\,k)$.

Đặc biệt khi k = – 1 thì F = D_O là phép đối xứng tâm O.

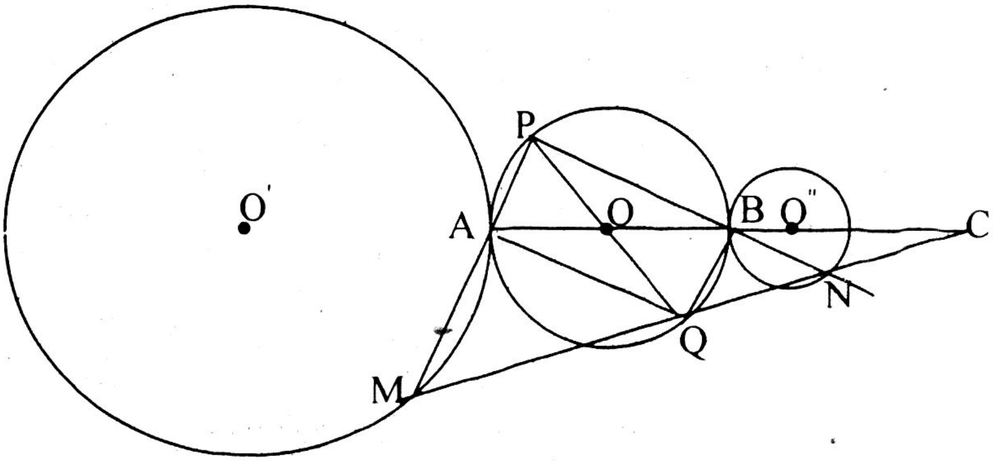
Bài 5

Ta có: F: M → M' và N → N' $\Rightarrow \overrightarrow{M'N'} + \overrightarrow{MN} = \vec{0}$. Gọi O là trung điểm M M' thì $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \vec{0}$. Ta có: $\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{ON'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'N'} = \vec{0}$.

Suy ra, O là trung điểm của NN'. Suy ra F = D_O là phép đối xứng tâm.

Bài 6.

a) Ta có: $\widehat{PBQ} = 90^0 \Rightarrow BQ \perp PB$ và $\widehat{APB} = 90^0 \Rightarrow AP \perp PB \Rightarrow BQ \,//\, AP$



Mặt khác: AB = BC, suy ra Q là trung điểm của CM (Đường trung bình của ΔAMC)

Tương tự, $AP \perp PB$ và $\widehat{PAQ} = 90^0 \Rightarrow AQ \perp AP \Rightarrow AQ \,//\, NB$.

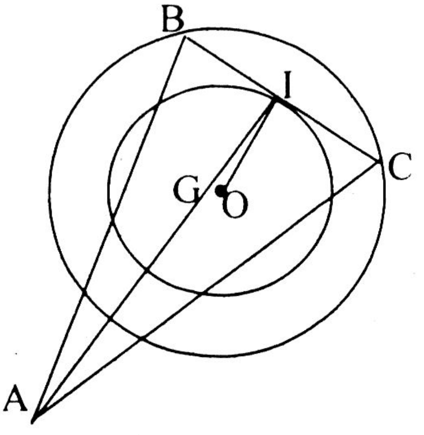
Suy ra N là trung điểm của CQ (Đường trung bình của ΔAQC).

b) Ta có: $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{CQ} \Rightarrow V(C\,;\,2)$: Q → M, Q thuộc đường tròn (O) nên M thuộc đường tròn (O') là ảnh của đường tròn (O) qua phép vị tự V(C ; 2).

Ta có: $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CQ} \Rightarrow V\left(Q;\frac{1}{2}\right)$: Q → N, thuộc đường tròn (O) nên M thuộc đường tròn (O'') là ảnh của đường tròn (O) qua phép vị tự $V\left(Q;\frac{1}{2}\right)$.

Mặt khác, PQ không trùng với AB nên quỹ tích của điểm M là đường tròn (O') trừ đi hai điểm là ảnh của A, B qua phép vị tự V(C ; 2) ; quỹ tích của điểm N là đường tròn (O'') trừ đi hai điểm là ảnh của A, B qua phép vị tự $V\left(Q;\frac{1}{2}\right)$.

Bài 7.



Gọi I là trung điểm của BC và G là trọng tâm tam giác ABC

Ta có: $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} \Rightarrow V\left(A;\frac{2}{3}\right): I \to G$.

Ta có: $IB = IC \Rightarrow OI \perp BC$.

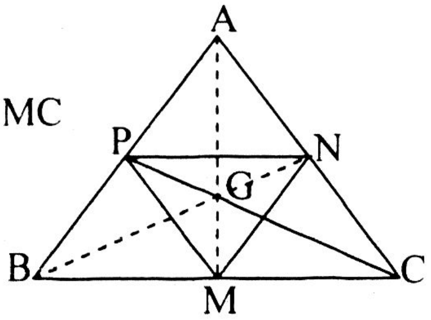
Trong tam giác vuông BOI

$$OI = \sqrt{OB^2 - BI^2} = \frac{\sqrt{4R^2 - m^2}}{2} = R' \text{ (không đổi)}$$

Suy ra, I thuộc đường tròn tâm O, bán kính R'.

Suy ra, G thuộc đường tròn tâm O', bán kính $r = \frac{2}{3}R'$ là ảnh của (O, R') qua phép vị tự $V\left(A;\frac{2}{3}\right)$. Đường tròn (O, R') cố định nên đường tròn tâm (O' ; r) cố định.

Bài 8.



a) Ta có: $T_{\overrightarrow{AP}}: \Delta APN \to \Delta PBM$, $T_{\overrightarrow{AN}}: \Delta APN \to \Delta NMC$

Ta có, tứ giác APMN là hình bình hành.

Gọi O là giao điểm hai đường chéo AM và PN thì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}$.

Suy ra: $D_O: \Delta APN \to \Delta MNP$

b) Gọi G là trọng tâm ΔABC thì $\overrightarrow{GM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{GP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$

Suy ra: $V\left(G;-\frac{1}{2}\right): \Delta ABC \to \Delta MNP$.

c) Gọi H_1, H_2, H_3 ; G_1, G_2, G_3 ; O_1, O_2, O_3 ; I_1, I_2, I_3 lần lượt là trực tâm, trọng tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, tâm đường tròn nội tiếp các tam giác APN, PBM, NCM.

Ta có: $T_{\overrightarrow{AP}}: \Delta APN \to \Delta PBM \Rightarrow T_{\overrightarrow{AP}}: H_1 \to H_2$; $G_1 \to G_2$; $O_1 \to O_2$; $I_1 \to I_2$

$\Rightarrow H_1H_2 = G_1G_2 = O_1O_2 = I_1I_2 = AP$ (1)

Tương tự: $T_{\overrightarrow{AN}}: \Delta APN \to \Delta NMC \Rightarrow T_{\overrightarrow{AN}}: H_1 \to H_3$; $G_1 \to G_3$; $O_1 \to O_3$; $I_1 \to I_3$

$\Rightarrow H_1H_3 = G_1G_3 = O_1O_3 = I_1I_3 = AN$ (2)

$T_{\overrightarrow{NP}}: \Delta NCM \to \Delta PMB \Rightarrow T_{\overrightarrow{NP}}$ $H_3 \to H_2$; $G_3 \to G_2$; $O_3 \to O_2$; $I_3 \to I_2$

$\Rightarrow H_2H_3 = G_2G_3 = O_2O_3 = I_2I_3 = PN$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta suy ra:

$\Delta ANP = \Delta H_1H_3H_2 = \Delta G_1G_3G_2 = \Delta O_1O_3O_2 = \Delta I_1I_3I_2$ (cạnh – cạnh – cạnh).

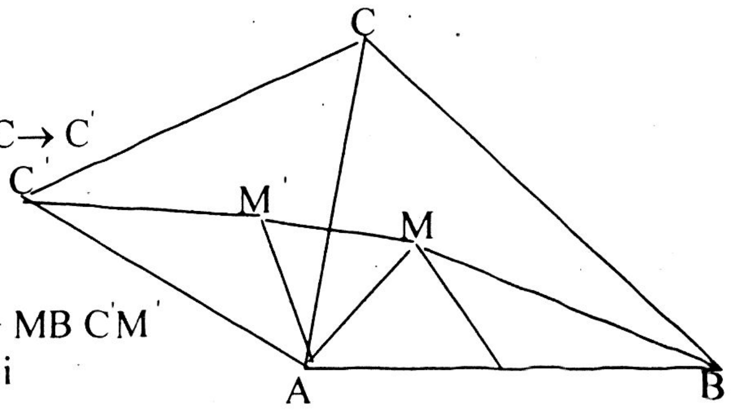
d) Ta có: A_1, B_1, C_1 là các điểm đối xứng với O lần lượt qua các điểm M, N và P

suy ra: $\overrightarrow{OA_1} = 2\overrightarrow{OM}$; $\overrightarrow{OB_1} = 2\overrightarrow{ON}$; $\overrightarrow{OC_1} = 2\overrightarrow{OP}$ $\Rightarrow$ V(O ; 2): $\Delta MNP \to \Delta A_1B_1C_1$.

e) Mặt khác: $V\left(G;-\frac{1}{2}\right)$: $\Delta ABC \to \Delta MNP$

$\Rightarrow$ V(O ; 2) $\circ$ $V\left(G;-\frac{1}{2}\right)$: $\Delta ABC \to \Delta A_1B_1C_1$

Mà V(O ; 2) $\circ$ $V\left(G;-\frac{1}{2}\right)$ = D_I là phép đối xứng tâm I, I là trung điểm của AA_1.



Bài 9.

a) Ta có: Q(A ; 60^0): M $\to$ M', C$\to$ C'

$\Rightarrow$ CM = C'M',

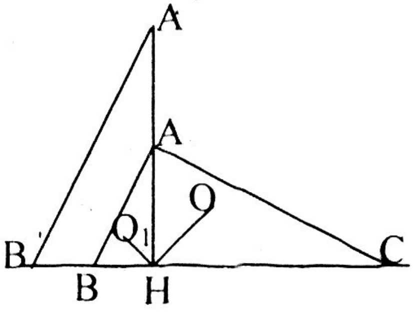
AM = AM' = MM'

(AM, AM') = 60^0

$\Rightarrow$ MA + MB + MC = MM' + MB C'M'

b) MA + MB + MC nhỏ nhất khi MM' + MB+ C'M' nhỏ nhất.

Ta có: MM' + MB C'M' $\geq$ BC' $\Rightarrow$MM' + MB C'M' nhỏ nhất khi B, M, M', C' thẳng hàng. Suy ra: $\widehat{AMB} = 120^0 \Rightarrow$ M thuộc cung chứa góc 120^0, dây cung AB và nằm bên trong tam giác ABC.



Bài 10.

a) Ta có: $\Delta HCA \sim \Delta HAB \Rightarrow \frac{HC}{HA} = \frac{CA}{AB} = \frac{HA}{HB}$

$\Rightarrow k = \frac{HA}{HC} = \frac{AB}{AC}$ và (HC, HA) = 90^0

Phép quay Q(H, 90^0): C $\to$ A' ; A $\to$ B'

$\Rightarrow$ HC = HA' và HA = HB', (CA, A'B') = 90^0

Phép vị tự V(H ; k): A' $\to$ A, B' $\to$ B $\Rightarrow$ V(H ; k): HA'B' $\to$ ΔHAB

Suy ra, phép đồng dạng:

Z(H, k, 90^0) = V(H ; k) $\circ$Q(H, 90^0):: $\Delta HCA \to \Delta HAB$.

b) Z(H, k, 90^0): $\Delta HCA \to \Delta HAB \Rightarrow$ Z(H, k, 90^0): O $\to$ O_1 $\Rightarrow \widehat{OHO_1} = 90^0$

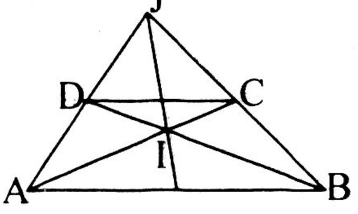
và HO_1 = k HO $\Rightarrow \frac{HO_1}{HO} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{HO_1}{AB} = \frac{HO}{AC} \Rightarrow \Delta HOO_1 \sim \Delta ACB$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
C	E	C	B	D	D	C	B	D	A	D	A	C	C
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25			
E	B	E	B	A	A	C	C	B	A	B			

1. f là phép quay tâm A, góc quay 90^0.

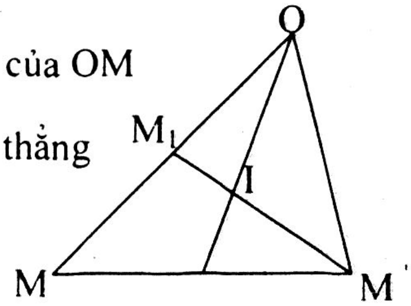
2. Tâm quay I không thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB'.



3. Ta có: $\frac{\overrightarrow{IA}}{\overrightarrow{IC}} = \frac{\overrightarrow{IB}}{\overrightarrow{ID}} = -\frac{DC}{AB} = -\frac{1}{2}$.

$V\left(I;-\frac{1}{2}\right): \overrightarrow{AB} \rightarrow \overrightarrow{CD}$.

4. Phép biến hình biến $\overrightarrow{AM} \rightarrow \overrightarrow{BM'}$ là một phép quay có tâm là giao điểm của nửa đường tròn AMB và đường trung trực đoạn thẳng AB nên tâm là trung điểm của cung AB.



5. Phép vị tự $V\left(O;\frac{1}{2}\right)$: M→ M_1 ⇒ M_1 là trung điểm của OM

Ta có I là trọng tâm tam giác OMM' nên M_1, I, M' thẳng hàng và $\overrightarrow{IM'} = -2\overrightarrow{IM_1}$ ⇒ V(I ; −2): M_1 → M'.

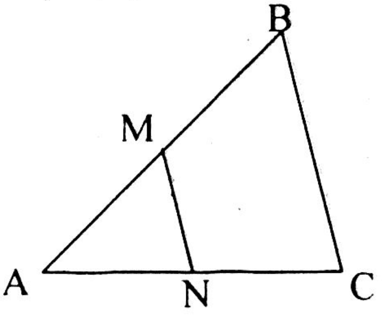
⇒ V(I ; −2) ∘ $V\left(O;\frac{1}{2}\right)$: M→ M'.

6. Đường thẳng đi qua trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp của một tam giác gọi là đường thẳng Euler. Tam giác ABC vuông cân tại A nên đường cao AH cũng là đường trung trực, đường trung tuyến ứng với đỉnh A nên qua trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp thuộc đường cao AH. Vậy, đường thẳng Euler của tam giác ABC vuông cân tại A là đường cao AH.

7. Khi k = 1 thì phép biến hình f trở thành phép dời hình.

8. Khi k = 1 và φ ≠ 0 thì phép biến hình f trở thành phép quay.

9. Khi k≠ 1 và φ = π thì phép biến hình f trở thành phép vị tự có tỉ số âm.



10. Ta có: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$.

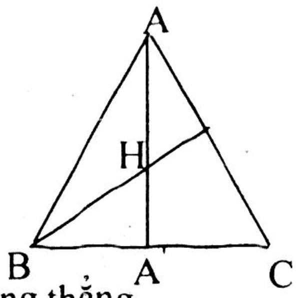
$V\left(A;\frac{1}{2}\right)$: B → M ; C → N

⇒Z(A ; $\frac{1}{2}$; 0^0) = $V\left(A;\frac{1}{2}\right)$: ΔABC → ΔAMN

11. Tam giác ABC vuông hoặc cân tại A.

12. Ta có: A'A = $\sqrt{3}$ A'C và (A'C, A'A) = 90^0

Phép đồng dạng Z(A' ; $\sqrt{3}$;90^0): ΔA'CH → ΔA' AB

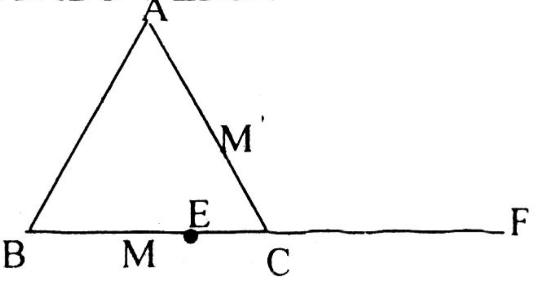


13. Phép đồng dạng $Z\left(A;k;\widehat{A}\right)$:B → C.

B thuộc một đường thẳng nên quỹ tích của C là một đường thẳng.

14. Ta có O là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔABC nên OA = OB = OC và

$\widehat{BOC}=\widehat{COA}=\widehat{AOB}=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow Q\left(O;\frac{2\pi}{3}\right)$: ΔABC→ ΔBCA



15. Ta có: BM = 2CM' ⇒ CM' = $\frac{1}{2}$BM

(BM, CM') = 120^0 ⇒ Phép đồng dạng tỉ số k = $\frac{1}{2}$ và góc quay φ = 120^0 biến M thành M'.

16. Tâm là giao điểm của đường tròn đường kính EF và cung chứa góc 120^0 đi qua B và C.

17. f: M(x ; y) → M(x ; y) ⇒ $\begin{cases}x^2=1\\y^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm1\\y=\pm2\end{cases}$

nên các điểm kép là (1 ; 2) ; (1 ; – 2) ; (– 1 ; 2) ; (– 1 ; – 2).

18. Véc tơ tịnh tiến $\vec{u}$ = (3 ; – 5).

19. Phép vị tự tâm O, tỉ số k = 2 biến đường tròn (C_1) thành đường tròn (C_2).

20. Phương trình của đường thẳng: x – y – 2 = 0.

21. $D_\Delta\circ D_{Ox}=Q\left(O;\frac{\pi}{3}\right)$.

22. Phép quay Q(O ; 180^0).

23. Tâm quay I(2 ; 1).

24. Tâm I(3; 0) và tỉ số k = 5.

25. Biểu thức giải tích của phép vị tự f tâm I(x_0 ; y_0), tỉ số k là:

$\begin{cases}x'=kx+(1-k)x_0\\y'=ky+(1-k)y_0\end{cases}$. f: A(1 ; 3) → A' (– 4 ; 6) và k = 2

Suy ra: $\begin{cases}-4=2+(1-2)x_0\\6=6+(1-2)y_0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=6\\y_0=0\end{cases}$ nên biểu thức giải tích của phép vị tự f

Là $\begin{cases} x' = 2x - 6 \\ y' = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x' + 6}{2} \\ y = \dfrac{y'}{2} \end{cases}$

Tiếp tuyến của đường tròn (C') tại A' là: y = x + 10.

CHƯƠNG 2: ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ SONG SONG

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG.

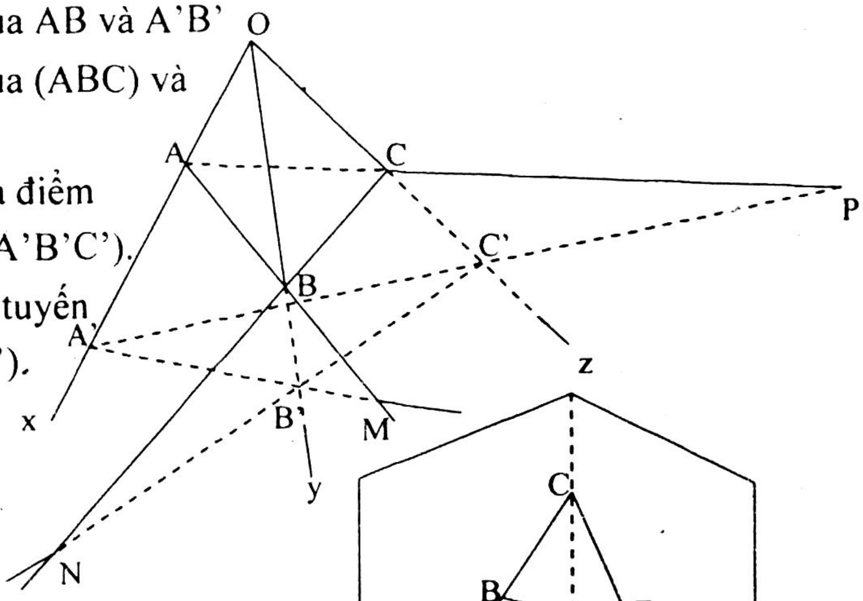
Bài 1.

HD: M là giao điểm của AB và A'B'

⇒ M là điểm chung của (ABC) và (A'B'C').

Tương tự: N, P cũng là điểm chung của (ABC) và (A'B'C').

⇒ M, N, P thuộc giao tuyến của (ABC) và (A'B'C').



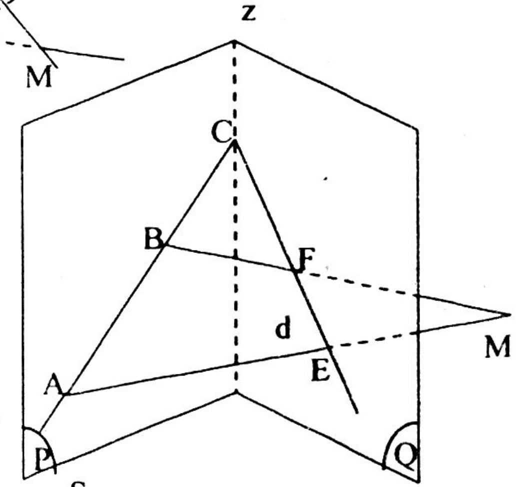
Bài 2.

HD: C ∈ d ⇒ C ∈ (Q), lại có C ∈ AB

⇒ C là điểm chung của (MAB) và (Q).

E, F là giao của MA, MB với (Q) ⇒ E, F là điểm chung của (MAB) và (Q).

⇒ C, E, F thẳng hàng.



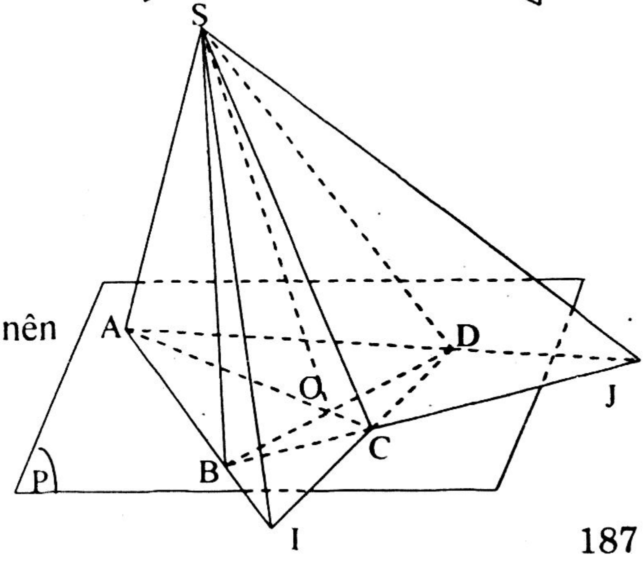
Bài 3.

HD: Gọi O là giao của AC và BD

⇒ giao tuyến của (SAC) và (SBD) là SO.

Vì ABCD không phải là hình thang nên AB cắt CD tại I; AD cắt BC tại J.

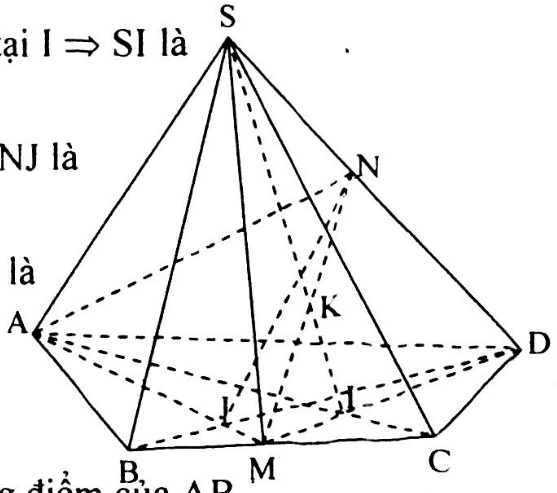
Khi đó



Giao tuyến của (SAB) và (SCD) là SI;

Giao tuyến của (SBC) và (SAD) là SJ.

Bài 4.

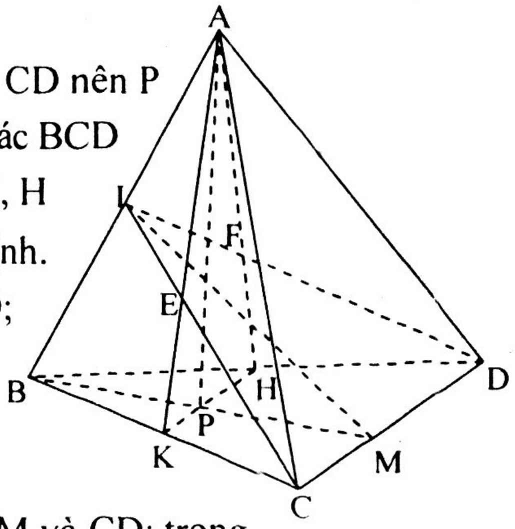


HD: a) Trong mp(ABCD): MD cắt AC tại I ⇒ SI là giao tuyến của (SMN) và (SAC).

Trong mp(ABCD): AM cắt BD tại J ⇒ NJ là giao tuyến của (MAN) và (NBD).

b) Trong mp(SMD): SI cắt MN tại K ⇒ K là giao của MN và (SAC).

Bài 5.

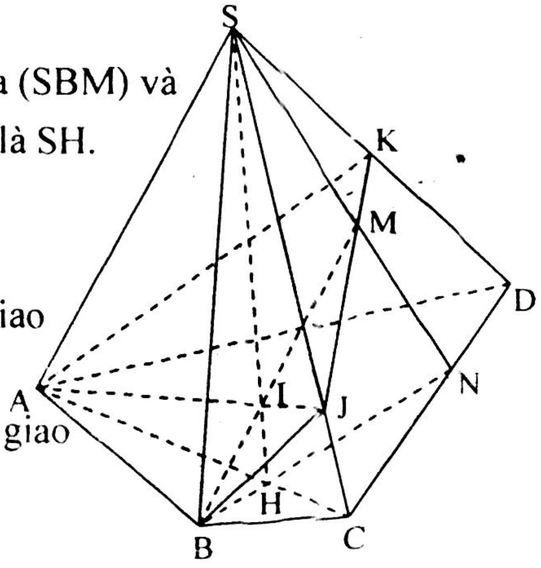


HD: a) * M di động trên CD và I là trung điểm của AB ⇒ IM luôn nằm trên mp(ICD) cố định.

* P là trung điểm của BM và M di động trên CD nên P luôn nằm trên đường trung bình KH của tam giác BCD (K, H lần lượt là trung điểm của BC, BD). K, H cố định⇒ AP luôn nằm trên mp(AKH) cố định.

b) Trong mp(ABD) gọi F là giao của AH và ID; trong mp(ABC) gọi E là giao của AK và IC. Giao tuyến của (ICD) và (AKH) là EF.

Bài 6.



HD: a) Trong mp(SCD): gọi N là giao của SM và CD; trong mp(ABCD) gọi H là giao của BN và AC.

Ta có: S, H là hai điểm chung phân biệt của (SBM) và (SAC) ⇒ giao tuyến của (SBM) và (SAC) là SH.

b) Trong mp(SBN) BM cắt SH tại I ⇒ I là giao của BM và (SAC).

c) Trong mp(SAC): AI cắt SC tại J ⇒ BJ là giao tuyến của (ABM) và (SBC).

Trong mp(SCD): JM cắt SD tại K ⇒ JK là giao tuyến của (ABM) và (SCD).

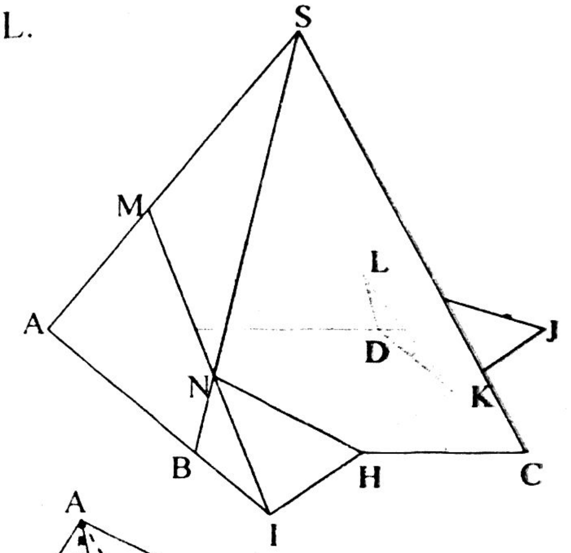
Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác ABJK.

Bài 7.

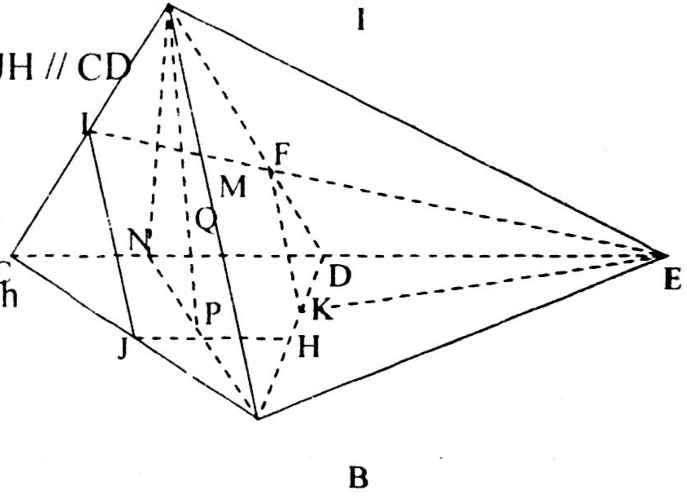
HD: Trong mp(ABCD): HK cắt AB, AD lần lượt tại I, J.

Trong mp(SAB): IM cắt SB tại N; trong mp(SAD): JM cắt SD tại L.

Thiết diện cần tìm là ngũ giác MNHKL.



Bài 8.



HD: a) E là giao của CD và JK.

Gọi H là trung điểm của BD $\Rightarrow$ JH // CD

Ta có: $\Delta JHK \sim \Delta EDK$

$\Rightarrow \dfrac{JH}{ED} = \dfrac{KH}{KD} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow ED = 2JH.$

Mặt khác: JH là đường trung bình của $\Delta BCD \Rightarrow CD = 2JH$.

Vậy: DE = DC.

b) F là giao của IE và AD.

Xét ΔACE: EI và AD là các trung tuyến $\Rightarrow$ F là trọng tâm của $\Delta ACE \Rightarrow FA = 2FD$.

c) Xét ΔBCE: EJ và BD là các trung tuyến $\Rightarrow$ K là trọng tâm của ΔBCE

$\Rightarrow \dfrac{EK}{EJ} = \dfrac{2}{3}.$

Theo b) F là trọng tâm của $\Delta ACE \Rightarrow \dfrac{EF}{EI} = \dfrac{2}{3}$.

Khi đó, trong ΔEIJ ta có: $\dfrac{EK}{EJ} = \dfrac{2}{3} = \dfrac{EF}{EI} \Rightarrow FK // IJ$.

d) Trong mp(BCD): BN cắt JK tại P.

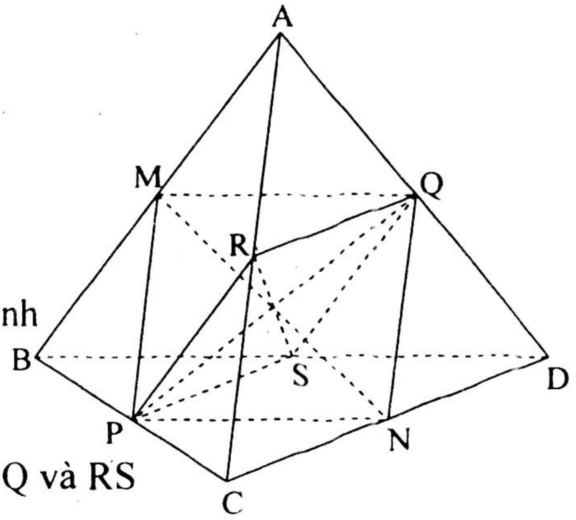
Trong mp(ABN): MN cắt AP tại Q.

Q là giao của MN và (IJK).

§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Bài 1.

HD: Xét tứ diện ABCD: M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, AD, AC, BD. Ta chứng minh: MN; PQ, RS đồng quy.



Ta có: MP // AC; MP = $\frac{1}{2}$AC ;

NQ // AC; NQ = $\frac{1}{2}$AC

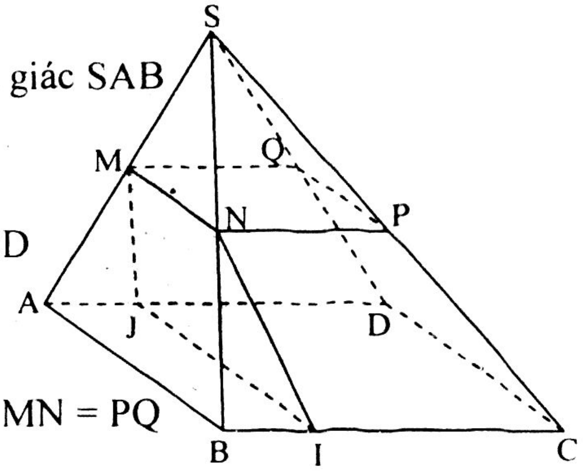
⇒ MP // NQ; MP = NQ ⇒ MPNQ là hình bình hành ⇒ MN và PQ cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn.

Tương tự: PSQR là hình bình hành ⇒ PQ và RS cắt nhau tại trưng điểm mỗi đoạn.

Từ đó: MN, PQ, RS đồng quy.

Bài 2.

HD: a) MN là đường trung bình của tam giác SAB



⇒ MN // AB; MN = $\frac{1}{2}$AB.

PQ là đường trung bình của tam giác SCD

⇒ PQ // CD; PQ = $\frac{1}{2}$CD.

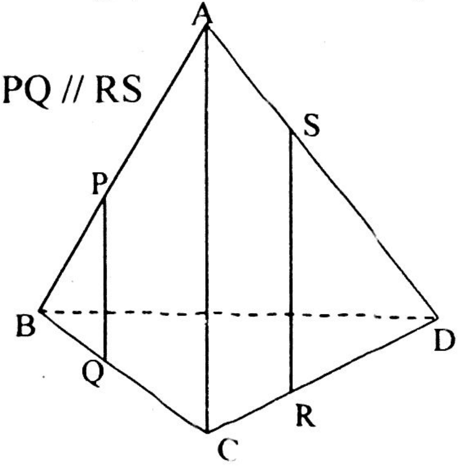
Mà AB // CD; AB = CD nên MN // PQ; MN = PQ

⇒ MNPQ là hình bình hành.

b) MN // AB ⇒ giao tuyến của (MNI) và (ABCD) là đường thẳng qua I và song song với AB, cắt AD tại J.

Tứ giác MNIJ là thiết diện cần tìm. MNIJ là hình thang (vì MN // AB // IJ).

Bài 3.



a) Vì P, Q, R, S đồng phẳng và PQ ≠ RS nên hoặc PQ // RS hoặc PQ cắt RS.

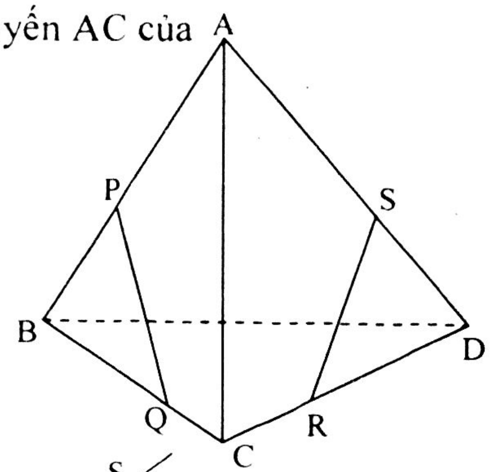
* Khi PQ // RS:

PQ ⊂ (ABC); RS ⊂ (ACD);

giao tuyến của (ABC) và (ACD) là AC

⇒ PQ // AC // RS.

* Khi PQ cắt RS $\Rightarrow$ giao của PQ và RS là điểm chung của (ABC) và (ACD) $\Rightarrow$ giao điểm thuộc giao tuyến AC của (ABC) và (ACD) $\Rightarrow$ PQ, RS, AC đồng quy.



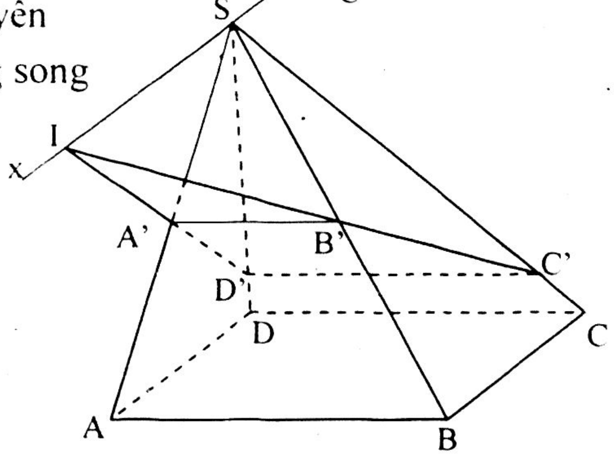
b) Tương tự a).

Bài 4.

HD: a) $A'B' \subset (P)$; $A'B' // AB // CD$

$\Rightarrow A'B' \subset (P)$; $A'B' // CD \Rightarrow$ giao tuyến của (P) và (SCD) là đường thẳng song song với A'B', CD $\Rightarrow C'D' // A'B'$

$\Rightarrow$ A'B'C'D' là hình thang.



b) I là giao của A'D' và C'B' nên I là điểm chung của (SAD) và (SBC)

$\Rightarrow$ I thuộc giao tuyến của 2 mp này.

Ta có: $AD \subset (SAD)$;

$BC \subset (SBC)$; $AD // BC$

$\Rightarrow$ giao tuyến của (SAD) và (SBC) là đường thẳng Sx qua S và song song với AD và BC. Do AD cố định nên Sx cố định.

Vậy I luôn nằm trên Sx cố định.

Bài 5.

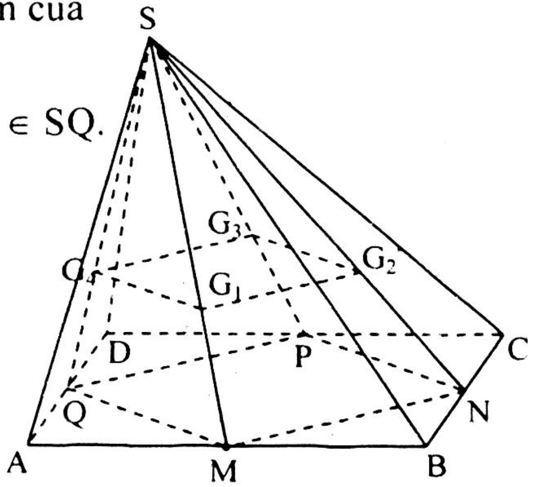
HD: Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

Khi đó: $G_1 \in SM$, $G_2 \in SN$, $G_3 \in SP$, $G_4 \in SQ$.

Xét tam giác SMN: $\dfrac{SG_1}{SM} = \dfrac{2}{3} = \dfrac{SG_2}{SN}$

$\Rightarrow G_1G_2 // MN$ và $\dfrac{G_1G_2}{MN} = \dfrac{2}{3}$

Tương tự: $G_3G_4 // PQ$ và $\dfrac{G_3G_4}{PQ} = \dfrac{2}{3}$



Mà MN // PQ và MN = PQ nên:

$G_1G_2 // G_3G_4$ và $G_1G_2 = G_3G_4 \Rightarrow G_1G_2G_3G_4$ là hình bình hành (1).

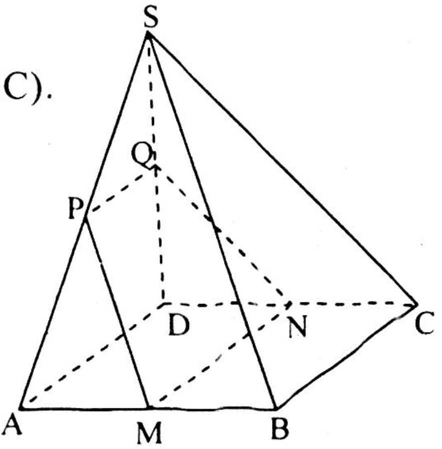
Làm tương tự ta cũng có $\frac{G_1G_4}{QM} = \frac{2}{3}$;

Vì ABCD là hình chữ nhật nên $QM = MN \Rightarrow G_1G_2 = G_1G_4$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow G_1G_2S_3G_4$ là hình thoi.

§3. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG

Bài 1.



HD: a) * MN // BC; BC ⊂ (SBC) ⇒ MN // (SBC).

* MN // AD; AD ⊂ (SAD) ⇒ MN // (SAD).

b) * PM // SB; PM ⊂ (MNP) ⇒ SB // (MNP).

* MN // AD; MN ⊂ (MNP); AD ⊂ (SAD)

⇒ giao tuyến

của (MNP) và (SAD) là đường thẳng qua P, song song với AD cắt SD tại Q.

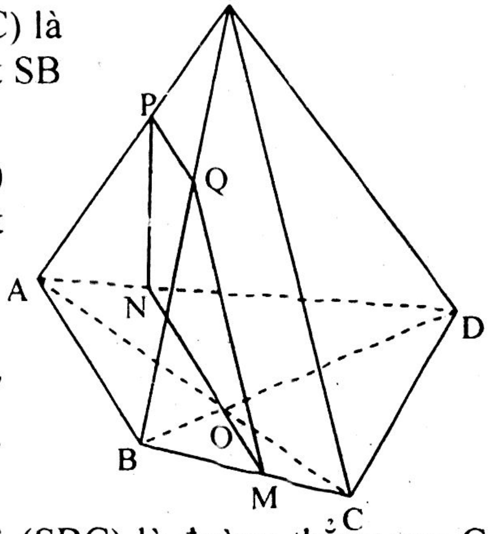
Vì P là trung điểm của SA nên Q là trung điểm của SD.

Ta có: NQ // SC; NQ ⊂ (MNP) ⇒ SC // (MNP).

Bài 2.

HD: Gọi mp đó là (α).

Vì (α) // AB nên giao tuyến của (α) và (ABCD) là đường thẳng qua O và song song với AB, cắt BC tại M, AD tại N.



Vì (α) // SC nên giao tuyến của (α) và (SBC) là đường thẳng qua M và song song với SC, cắt SB tại Q.

Vì (α) // AB nên giao tuyến của (α) và (SAB) là đường thẳng qua Q và song song với AB, cắt SA tại P.

Tứ giác MNPQ là thiết diện cần tìm.

Do MN // AB // PQ ⇒ MN // PQ hay MNPQ là hình thang.

Bài 3.

HD: a) * (P) // BC ⇒ giao tuyến của (P) và (SBC) là đường thẳng qua C' và song song với BC cắt SB tại B'.

* (P) // BC; BC // AD ⇒ AD // (P) ⇒ (P) cắt (SAD) theo giao tuyến song song với AD hay A'D' // AD.

Khi đó: A’D’ // AD // BC // B’C’ ⇒ A’D’ // B’C’

⇒ A’B’C’D’ là hình thang.

b) Vì B’C’ // BC và C’ là trung điểm của SC nên B’ là trung điểm của SB

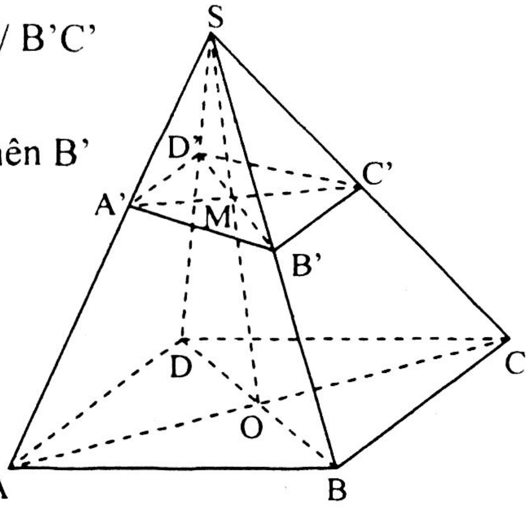
⇒ B’C’ cố định hay (P) luôn đi qua đường thẳng B’C’ cố định.

c) M là giao của A’C’ và B’D’

⇒ M là điểm chung của (SAC) và (SBD)

⇒ M luôn thuộc giao tuyến của (SAC) và (SBD). Giao tuyến của (SAC) và (SBD) là SO (O là giao của AC và BD).

Vậy M luôn nằm trên SO cố định.



Bài 4.

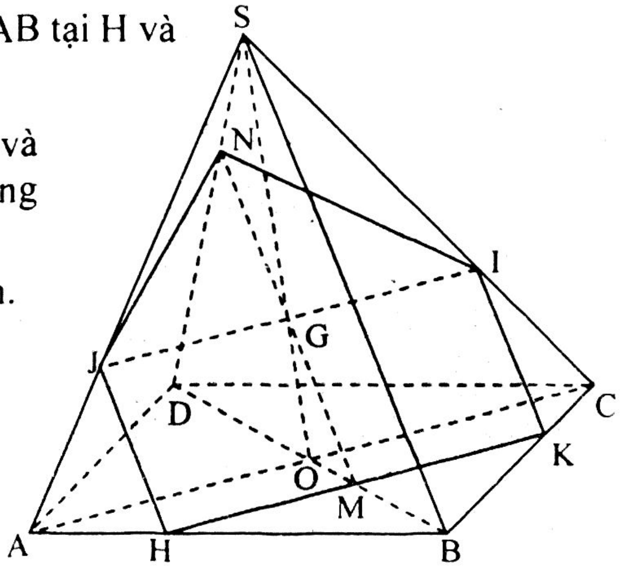
HD: Gọi O là giao của AC và BD. Vì G là trọng tâm của tam giác SBD nên $G \in SO$.

* (P) // SB ⇒ giao tuyến của (P) và (SBD) là đường thẳng qua G, song song với SB cắt BD tại M, cắt SD tại N.

* (P) // AC ⇒ giao tuyến của (P) và (ABCD) là đường thẳng qua M, song song với AC cắt AB tại H và BC tại K

* (P) // AC ⇒ giao tuyến của (P) và (SAC) là đường thẳng qua G, song song với AC cắt SA tại J và SC tại I.

Ngũ giác HKINJ là thiết diện cần tìm.



Bài 5.

HD: a) Vì (P) // BD, $BD \subset (ABCD)$, $A \in (ABCD)$ nên giao tuyến của (P) và (ABCD) là đường thẳng qua A, song song với BD cố định. Vậy (P) luôn đi qua giao tuyến cố định nói trên.

b) Gọi O là giao của AC và BD.

Trong mp(SAC) gọi I là giao của SO và AM

$\Rightarrow$ I là điểm chungcủa (P) và (SBD).

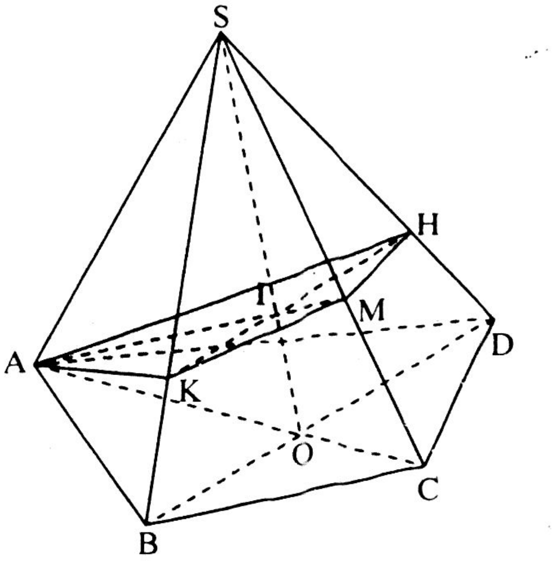
Vì (P) // BD nên giao tuyến của (P) và (SBD) là đường thẳng qua I, song song với BD, cắt SB tại K, cắt SD tại H.

Tứ giác AKMH là thiết diện cần tìm.

c) E là giao của MK và BC $\Rightarrow$ E là điểm chung của (P) và (ABCD).

F là giao của MH và CD

$\Rightarrow$ F là điểm chung của (P) và (ABCD).



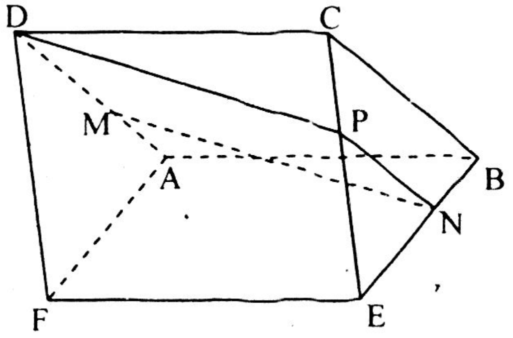
Suy ra: E, F thuộc giao tuyến của (P) và (ABCD) (xác định ở câu a) $\Rightarrow$ A, E, F thẳng hàng.

Bài 6.

HD: Kẻ NP // CB (P $\in$ CE).

Trong tam giác EBC: $\dfrac{NP}{BC}=\dfrac{EN}{EB}$.

Vì $\dfrac{AM}{MD}=\dfrac{BN}{NE}$ nên $\dfrac{EN}{EB}=\dfrac{MD}{AD}$.



Từ đó: $\dfrac{NP}{BC}=\dfrac{MD}{AD}$, mà BC = AD $\Rightarrow$ NP = MD.

Mặt khác: PN // BC // AD $\Rightarrow$ PN // MD

Vậy MNPD là hình bình hành $\Rightarrow$ MN // DP $\Rightarrow$ MN // (CDFE) (vì DP $\subset$ (CDFE)).

§4. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG.

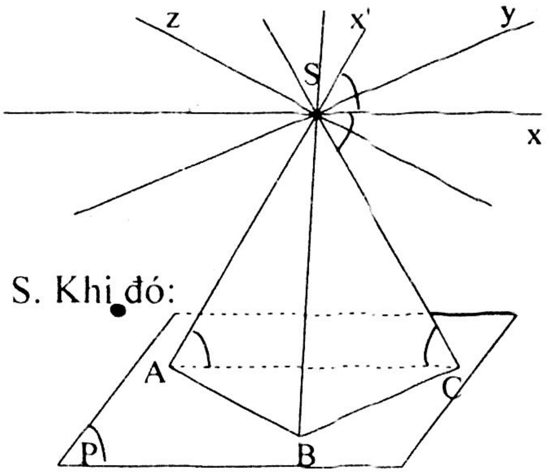
Bài 1.

HD: Gọi Sx, Sy, Sz lần lượt là các đường phân giác ngoài tại S của các tam giác SAC, SBC, SAB.

Vì SA = SC nên SAC là tam giác cân tại S. Khi đó:

$\widehat{SAC}+\widehat{SCA}=\widehat{CSx'}$

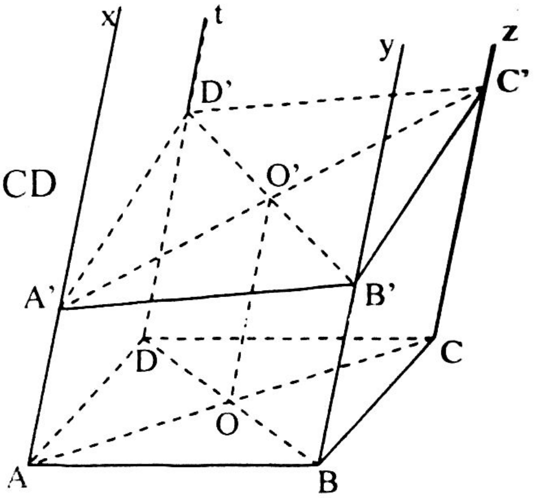
$\Rightarrow 2\widehat{SAC}=2\widehat{xSx'} \Rightarrow \widehat{SAC}=\widehat{xSx'}$



$\Rightarrow$ Sx // AC $\Rightarrow$ Sx // (P)

Tương tự: Sy // (P); Sz // (P).

Vậy Sx, Sy, Sz đồng phẳng (chúng cùng nằm trên mặt phẳng qua S và song song với (P)).



Bài 2.

HD: a) AA', AB $\subset$ (AA', BB');

CC', CD $\subset$ (CC', DD'); AA' // CC'; AB // CD $\Rightarrow$ (AA', BB') // (CC', DD').

b) (AA', BB') // (CC', DD');

A'B' là giao tuyến của (P) và (AA', BB');

D'C' là giao tuyến của (P) và (CC', DD')

$\Rightarrow$ A'B' // C'D'.

Tương tự câu a, ta chứng minh được:

(AA', DD')// (BB', CC') và thực hiện như trên ta có: A'D' // B'C'.

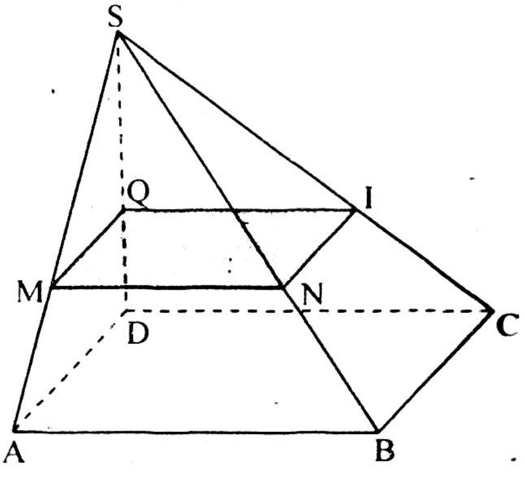
Vậy A'B'C'D' là hình bình hành.

c) Gọi O, O' lần lượt là giao của các đường chéo trong hai hình bình hành **ABCD,** A'B'C'D'.

Ta có: + OO' là đường trung bình của hình thang AA'C'C $\Rightarrow$ AA' + **CC'** = 2OO'.

+ OO' là đường trung bình của hình thang BB'D'D $\Rightarrow$ BB' + DD' = **2OO'.**

$\Rightarrow$ AA' + CC' = BB' + DD'.



Bài 3.

HD: * (P) // (ABCD); giao tuyến của (ABCD) và (SAB) là AB; M là điểm chung của (P) và (SAB) $\Rightarrow$ giao tuyến của (P) và (SAB) là đường thẳng qua M, song song với AB, cắt SB tại N.

* Lí luận tương tự: giao tuyến của (P) và (SBC) là đường thẳng qua N, song song với BC, cắt SC tại I. Giao tuyến của (P) và (SCD) là đường thẳng qua I, song song với CD, cắt SD tại Q.

Tứ giác MNIQ là thiết diện cần tìm.

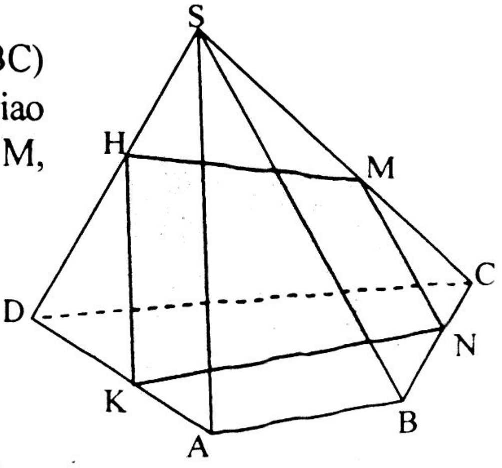
Ta có: + MN // AB // CD // IQ

$\Rightarrow$ MN // IQ.

+ (P) // (ABCD); giao tuyến của (P) và (SAD) là MQ; giao tuyến của (ABCD) và (SAD) là AD ⇒ MQ // AD. Khi đó: MQ // AD // BC // NI ⇒ MQ // NI.

Vậy MNIQ là hình bình hành.

Bài 4.



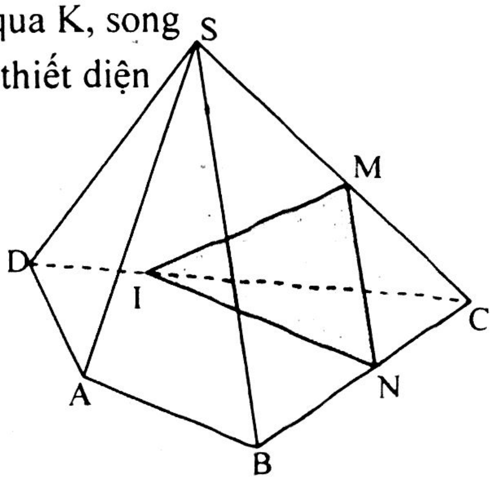
HD: (P) // (SAB); giao tuyến của (SAB) và (SBC) là SB; M là điểm chung của (P) và (SBC) ⇒ giao tuyến của (P) và (SBC) là đường thẳng qua M, song song với SB, cắt BC tại N.

* Tìm giao tuyến của (P) và (ABCD): lí luận tương tự ta có giao tuyến của (P) và (SBC) là đường thẳng qua N, song song với AB.

Lúc này, xảy ra 1 trong 2 trường hợp:

1. Nếu đường thẳng trên cắt AD tại K thì ta tìm giao tuyến của (P) và (SAD), là đường thẳng qua K, song song với SA, cắt SD tại H. Tứ giác MNKH là thiết diện cần tìm.

2. Nếu đường thẳng trên cắt CD tại I thì tam giác MNI là thiết diện cần tìm.



Bài 5.

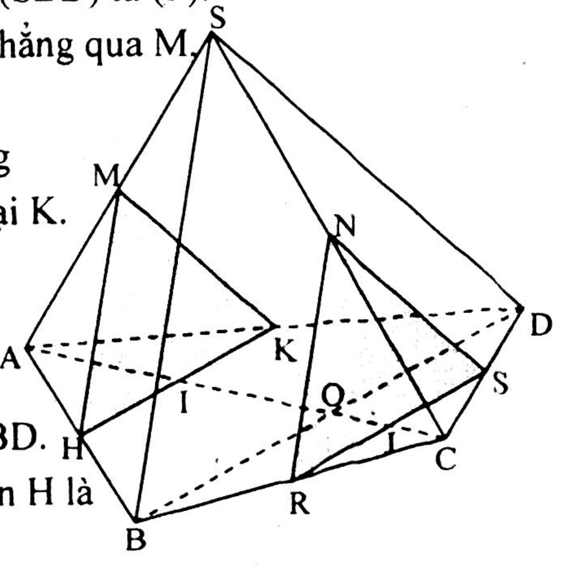
HD: a) * Gọi mặt phẳng qua M, song với (SBD) là (P):

+ Giao tuyến của (P) và (SAB) là đường thẳng qua M, song song với SB, cắt AB tại H.

+ Giao tuyến của (P) và (ABCD) là đường thẳng qua H, song song với BD, cắt AD tại K.

⇒ mp(MHK) là mặt phẳng cần tìm.

* Tương tự: mặt phẳng qua N, song song với (SBD) là mp(NRS): NR // SB, RS // BD.



b) Vì M là trung điểm của SA; MH // SB nên H là trung điểm của AB. Lại có: HK // BD

⇒ HK là đường trung bình của tam giác ABD

⇒ AO = 2IO.

Tương tự: OC = 2OJ.

Từ đó: AO + OC = 2(IO + OJ) ⇒ AC = 2IJ.

Bài 6.

HD: a) Vì I, I’ lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, B’C’ nên II’ // BB’ và II’ = BB’

⇒ II’ // AA’ và II’ = AA’

⇒ AA’I’I là hình bình hành

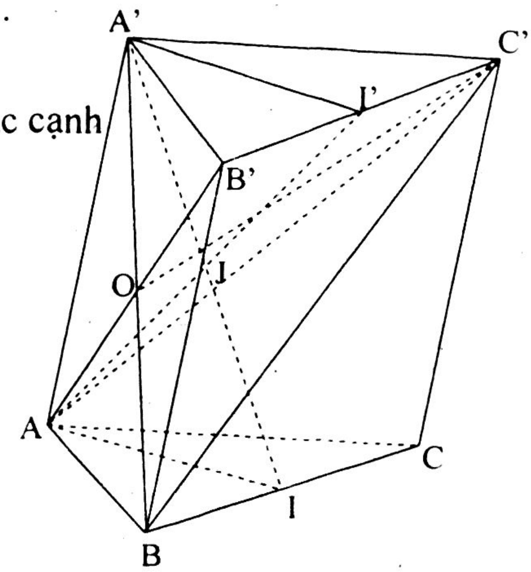
⇒ AI // A’I’.

b) Trong mp(AA’I’I): AI’ cắt A’I tại J.

J là giao của IA’ và (AB’C’).

c) Trong mp(AA’B’B): AB’ cắt A’B tại O.

C’O là giao tuyến của (AB’C’) và (BA’C’).



Bài 7.

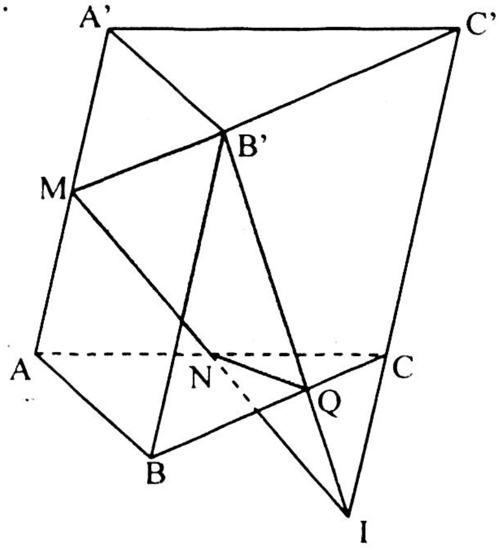
HD:

a) Trong mp(AA’C’C): MN cắt CC’ tại I

⇒ I ∈ (BB’C’C).

Trong mp(BB’C’C): B’I cắt BC tại Q.

Tứ giác MNQB’ là thiết diện cần tìm.



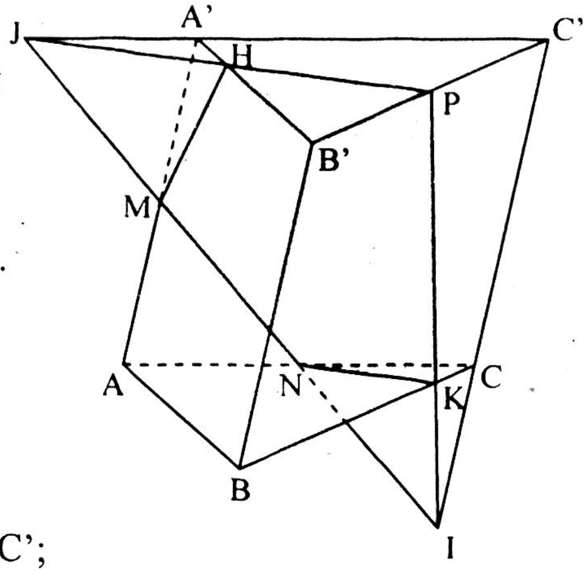
b) Trong mp(BB’C’C): PI cắt BC tại K.

Trong mp(AA’C’C): MN cắt A’C’ tại J

⇒ J ∈ (A’B’C’).

Trong mp(A’B’C’): PJ cắt A’B’ tại H.

Ngũ giác MNKPH là thiết diện cần tìm.



Bài 8.

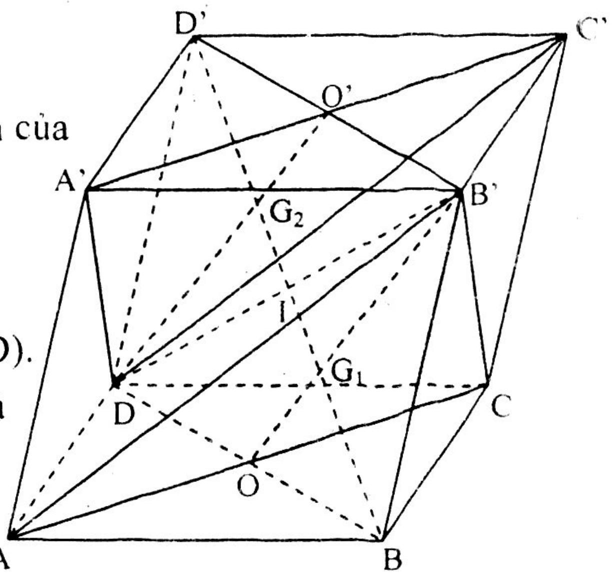
HD: a) Ta có:

AA’C’C là hình bình hành ⇒ AC // A’C’;

ADC'B' là hình bình hành ⇒ AB' // C'D

⇒ mp(ACB') // mp(A'C'D).

b) Gọi O, O' lần lượt là tâm của các hình bình hành ABCD, A'B'C'D'.



Xét hình bình hành BB'D'D:

+ BD' cắt B'D tại I ⇒ I là trung điểm của B'D.

+ B'O cắt BD' tại G_1; DO' cắt BD' tại G_2. Khi đó: G_1, G_2 chính là giao của BD' với mp(ACB') và mp(A'C'D).

Ta cần chứng minh: G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ACB', A'C'D.

Ta có: trong tam giác B'BD: B'O và BI là các trung tuyến ⇒ G_1 là trọng tâm của tam giác B'BD. Mặt khác, B'O cũng là trung tuyến của tam giác ACB' ⇒ G_1 là trọng tâm tam giác ACB'.

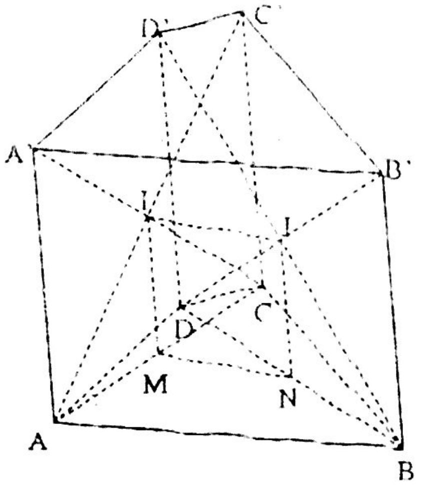
Tương tự: G_2 là trọng tâm của tam giác A'C'D.

c) Vì G_1 là trọng tâm của tam giác B'BD nên $G_1I = \frac{2}{3}BI$; $G_1I = \frac{1}{2}BG_1$.

Vì G_2 là trọng tâm của tam giác D'B'D nên $G_2I = \frac{2}{3}D'I$; $G_2I = \frac{1}{2}D'G_2$.

Mà BI = D'I nên $BG_1 = G_1G_2 = D'G_2$.

Bài 9.



HD: Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, BI

Để ý rằng I, J là trung điểm của A'C, B'D.

Trong tam giác CAA': IM là đường trung bình

⇒ IM // AA'; IM = $\frac{1}{2}$AA'.

Trong tam giác DBB': JN là đường trung bình

⇒ JN // BB'; JN = $\frac{1}{2}$BB'.

Mà AA' // BB'; AA' = BB' nên IM // JN; IM = JN

⇒ MNJI là hình bình hành ⇒ IJ = MN.

Bài 10.

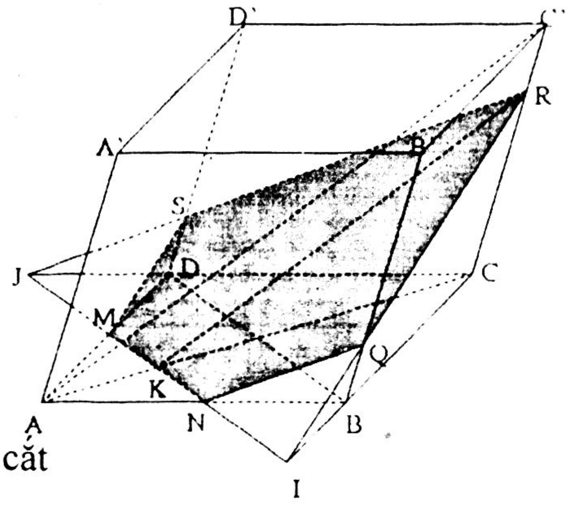
HD: * (P) qua M, (P) // BD ⇒ giao tuyến của (P) và (ABCD) là đường thẳng qua M, song song với BD, cắt AC, BC, CD lần lượt tại K, I, J.

* K ∈ (P), (P) // AC' ⇒ giao tuyến của (P) và (ACC') là đường thẳng qua K, song song với AC', cắt CC' tại R.

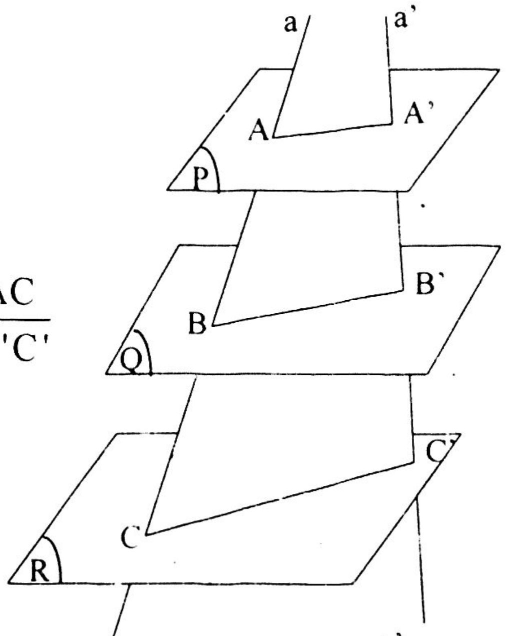
* Giao tuyến của (P) và (BB'C'C) là RI, cắt BB' tại Q.

* Giao tuyến của (P) và (CC'D'D) là RJ, cắt DD' tại S.

Ngũ giác MNQRS là thiết diện cần tìm.



Bài 11.



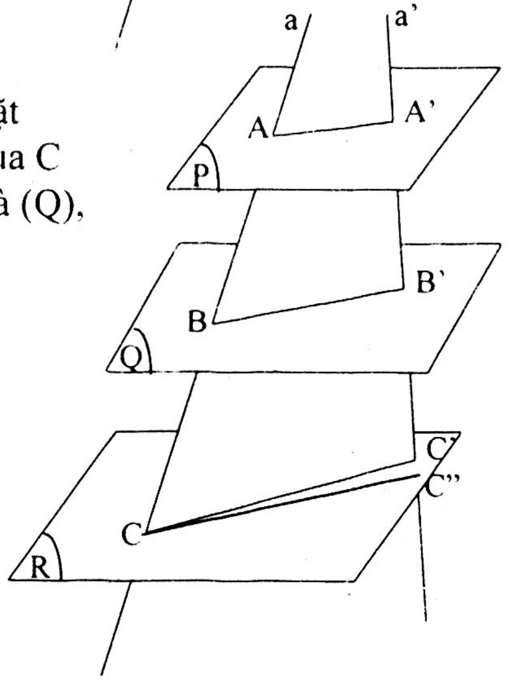
HD: Theo định lí Ta let: $\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$

Khi đó: $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AB+BC}{A'B'+B'C'}=\frac{AC}{A'C'}$

Suy ra: $A'B'=\frac{AB.A'C'}{AC}=\frac{m.k}{m+n}$

$B'C'=\frac{BC.A'C'}{AC}=\frac{n.k}{m+n}$.

Bài 12.



HD: Qua AA' và BB' ta dựng được 2 mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau. Qua C dựng mặt phẳng (R) song song với (P) và (Q), cắt a' tại C".

Ta có: $\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C''}$

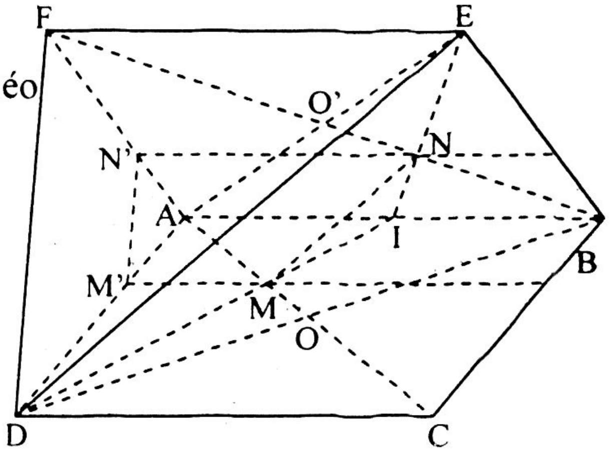
Mặt khác, theo giả thiết: $\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$

$\Rightarrow \frac{A'B'}{B'C'}=\frac{A'B'}{B'C''} \Rightarrow B'C' = B'C''$

⇒ C" trùng với C'.

ÔN TẬP CHƯƠNG II

Bài 1.



HD: a) Gọi O là giao của hai đường chéo AC và BD của hình bình hành ABCD.

Ta có: $\frac{AM}{AC} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow AM = \frac{1}{3}AC = \frac{2}{3}OA$

$\Rightarrow$ M là trọng tâm của tam giác DAB

$\Rightarrow$ M nằm trên trung tuyến DI của tam giác ABD.

Tương tự: N nằm trên trung tuyến EI của tam giác EAB.

Xét tam giác IDE: $\frac{IN}{IE} = \frac{IM}{ID} \Rightarrow MN \,//\, DE$.

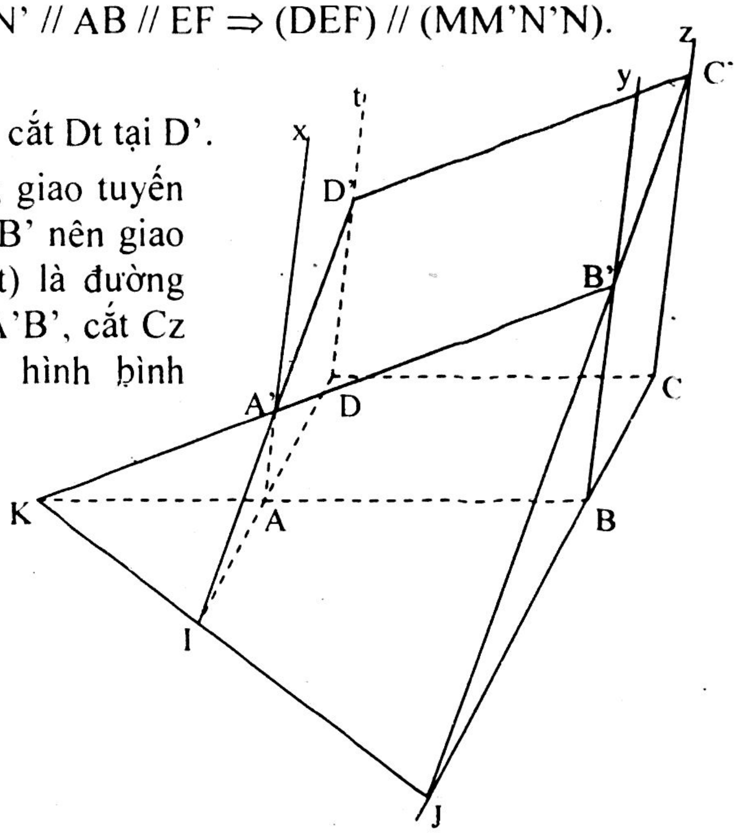
b) Vì MM' // AB nên $\frac{AM'}{AD} = \frac{IM}{ID} = \frac{1}{3}$; vì NN' // AB nên $\frac{AN'}{AF} = \frac{BN}{BF} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{AM'}{AD} = \frac{AN'}{AF} \Rightarrow M'N' \,//\, DF$.

Mà DE ⊂ (DEF) nên M'N' // (DEF).

c) Ta có: M'N' // DF (theo b); NN' // AB // EF ⇒ (DEF) // (MM'N'N).

Bài 2.



HD: a) Trong mp(Ax, Dt): IA' cắt Dt tại D'.

Vì mp(Ax, By) // mp(Cz, Dt); giao tuyến của (IA'B') và (Ax, By) là A'B' nên giao tuyến của (IA'B') và (Cz, Dt) là đường thẳng qua D', song song với A'B', cắt Cz tại C'.Khi đó: A'B'C'D' là hình bình hành vì:

+ A'B' // C'D' (cách dựng).

+ mp(Ax, Dt) // mp(By, Cz); giao tuyến của (IA'B') với mp(Ax, Dt), mp(By, Cz) lần lượt là A'D', B'C' ⇒ A'D' // B'C'.

b) K, I, J đều cùng nằm trong 2 mp: (IA’B’) và (ABCD) $\Rightarrow$ K, I, J thẳng hàng.

c) Trong tam giác KBB’: AA’ // BB’

$\Rightarrow \frac{KA}{KB} = \frac{AA'}{BB'} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ K là trung điểm của KB $\Rightarrow$ KA = a; KB = 2a.

Trong tam giác KBJ: IA // BJ $\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{KA}{KB} = \frac{IA}{JB} \Rightarrow$ JB = 2IA = 2a.

Xét tam giác KAI vuông tại A: $KI^2 = KA^2 + IA^2 = 2a^2 \Rightarrow KI = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác KBJ vuông tại B: $KJ^2 = KB^2 + JB^2 = 8a^2 \Rightarrow KJ = 2a\sqrt{2}$.

Suy ra: $IJ = KJ - KI = a\sqrt{2}$.

* IABJ là hình thang vuông nên diện tích của nó là: $\frac{1}{2}AB(IA + JB) = \frac{1}{2}a(a + 2a) = \frac{3a^2}{2}$

Bài 3.

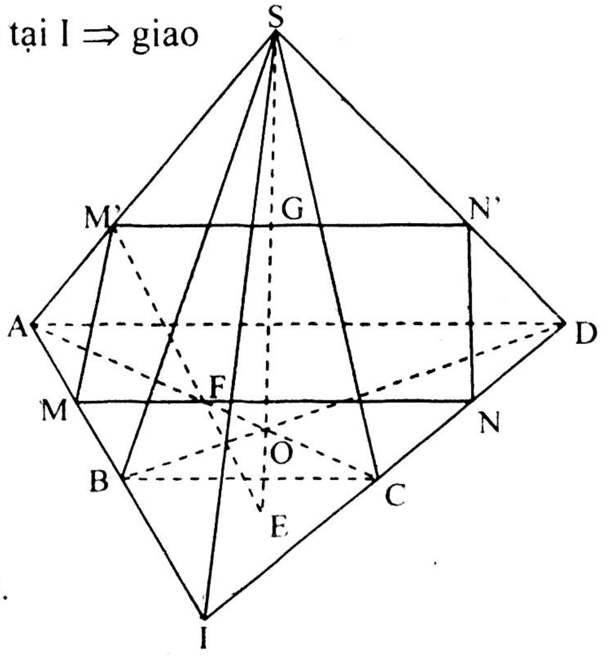
HD: a) Trong mp(ABCD): AB cắt CD tại I $\Rightarrow$ giao tuyến của (SAB) và (SCD) là SI.

b) Vì M, N là trung điểm của AB, DC nên MN // AD.

Giao tuyến của (MNG) và (ABCD) là MN, G là điểm chung của (MNG) và (SAD).

Suy ra giao tuyến của (MNG) và (SAD) là đường thẳng qua G, song song với AD, cắt SA, SD lần lượt tại M’, N’.

Tứ giác MNN’M’ là thiết diện cần tìm.



c) Gọi F là giao của AC và MN.

Trong mặt phẳng (SAC), gọi E là giao điểm của SO và M’F.

Khi đó: E $\in$ M’F $\Rightarrow$ E $\in$ (MNG); E $\in$ SO $\Rightarrow$ E là giao của SO và (MNG).

Bài 4. * (P) // SB; M là điểm chung của (P) và (SAB) $\Rightarrow$ giao tuyến của (P) và (SAB) là đường thẳng qua M, song song với SB, cắt SA tại I.

* (P) // SB; N là điểm chung của (P) và (SBC)

$\Rightarrow$ giao tuyến của (P) và (SBC) là đường thẳng qua N, song song với SB, cắt SC tại K.

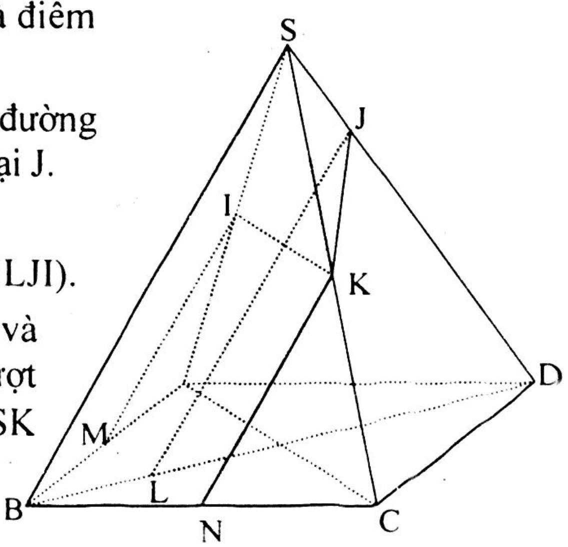
* Gọi L là giao của MN và BD ⇒ L là điểm chung của (P) và (SBD); (P) // SB

⇒ giao tuyến của (P) và (SBB) là đường thẳng qua L, song song với SB, cắt SD tại J.

Ngũ giác MNKJI là thiết diện cần tìm.

* Ta có: diện tích thiết diện S = 2.dt(MLJI).

Vì M, N là trung điểm của AB, BC và MI // SB, NK // SB nên I, K lần lượt là trung điểm của SA, SC ⇒ SI = SK (vì SA = SB).



Xét hai tam giác SJI và SJK có:

$SI = SK$; SJ chung; $\widehat{ISJ} = \widehat{KSJ} \Rightarrow \Delta SJI = \Delta SJK$

$\Rightarrow JI = JK \Rightarrow \Delta IJK$ cân tại J

$\Rightarrow JL \perp IK \Rightarrow JL \perp MN$.

Khi đó: $dt(MLJI) = \frac{1}{2}ML(MI + LJ)$.

Ta có: $MN = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow ML = \frac{a\sqrt{2}}{4}$; $MI = \frac{1}{2}SB = \frac{b}{2}$.

Trong ΔDSB: $LJ // SB \Rightarrow \frac{LJ}{SB} = \frac{DL}{DB} = \frac{3}{4} \Rightarrow LJ = \frac{3}{4}SB = \frac{3b}{4}$;

Vậy $dt(MNJI) = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{4}(\frac{b}{2} + \frac{3b}{4}) = \frac{5ab\sqrt{2}}{32}$. Từ đó: $S = \frac{5ab\sqrt{2}}{16}$.

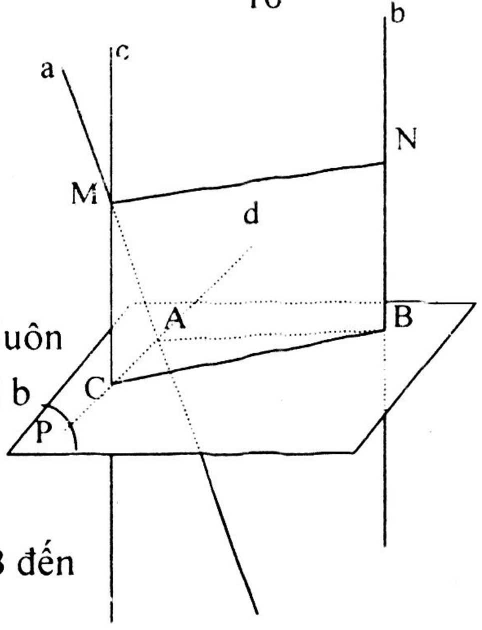
Bài 5.

HD: a) MNBC là hình bình hành, vì:

+ MC // NB (c // b).

+ $MN \subset$ mp(c; b); MN // (P); giao tuyến của mp(b; c) và (P) là BC ⇒ MN // BC.

b) Vì c // b nên mp(a; c) // b. Do a cố định nên c luôn nằm trong mp(Q) cố định qua a, song song với b ⇒ C luôn nằm trên giao tuyến của (P) và (Q).



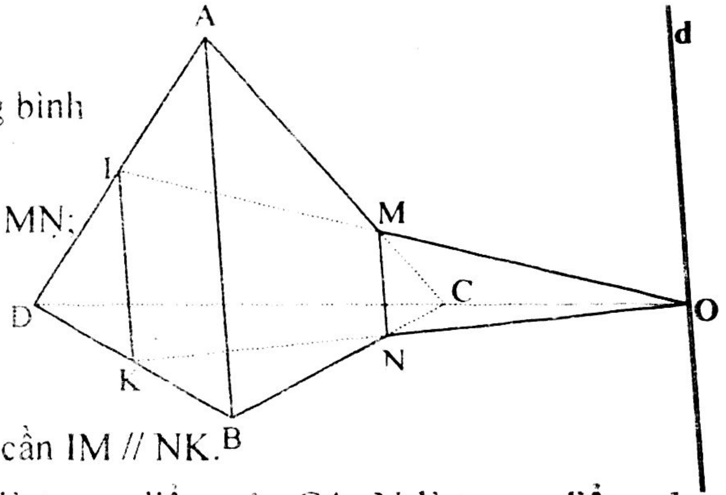
c) Gọi giao tuyến của (P) và (Q) là d.

Trong (P): B cố định, BC là đoạn xiên nối từ B đến một điểm của d (vì C luôn nằm trên d).

Khi đó: BC nhỏ nhất khi BC ⊥ d, vì MN = BC nên lúc này MN cũng nhỏ nhất.

Xác định MN: Từ B vẽ $BC_0 \perp d$. Từ C_0 vẽ đường thẳng c_0 song song với **b**. cắt a tại M_0. Trong mp(b; c_0): vẽ đường thẳng qua M_0, song song với BC_0, cắt b tại N_0. Khi đó: M_0N_0 là đường thẳng cần tìm.

Bài 6.



HD: a) Ta có: IK là đường trung bình của tam giác DAB $\Rightarrow$ IK // AB.

Giao tuyến của (P) và (ABC) là MN; $AB \subset (ABC)$.

Vì vậy: IK // MN $\Rightarrow$ MNKI là hình thang.

Để MNKI là hình bình hành thì cần IM // NK.

Khi đó: MI // NK // CD $\Rightarrow$ M là trung điểm của CA, N là trung điểm của CB.

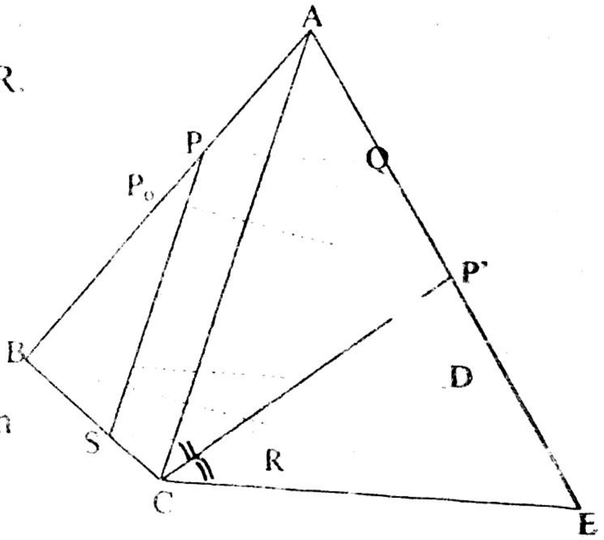
b) O là giao của MI và NK nên O là điểm chung của (ACD) và (BCD) $\Rightarrow$ O thuộc giao tuyến CD cố định của 2 mặt phẳng đó.

c) d là giao tuyến của (P) và (OAB); $IK \subset (P)$; $AB \subset (OAB)$; IK // AB $\Rightarrow$ d // AB.

Ta có: AB, CD là hai đường thẳng chéo nhau; d // AB; d luôn cắt CD $\Rightarrow$ mp(d; CD) // AB.

Vậy d luôn nằm trên mặt phẳng cố định qua CD, song song với AB.

Bài 7.



HD: a) PQ // BD // RS; PS // AC // QR.

b) Ta có: $PQ = \dfrac{AP.BD}{AB}$; $PS = \dfrac{BP.AC}{AB}$

Để PQRS là hình thoi thì PQ = PS

$\Rightarrow AP.BD = BP.AC \Rightarrow \dfrac{AP}{BP} = \dfrac{AC}{BD}$.

Xác định (α): ta chỉ cần xác định điểm P_0 trên AB để $\dfrac{AP_0}{BP_0} = \dfrac{AC}{BD}$.

Trong mp(BCD) dựng $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BD} \Rightarrow CE = BD$; CE // BD.

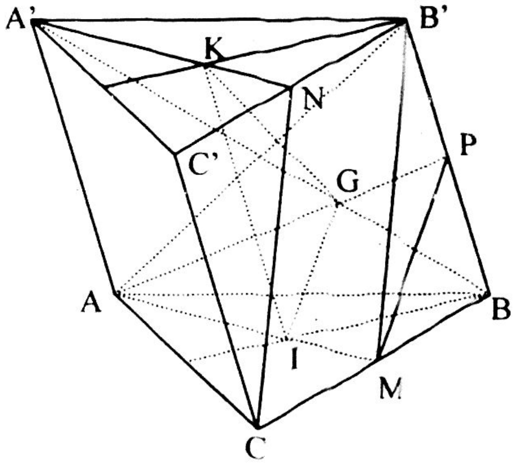
Trong tam giác ACE vẽ đường phân giác $\widehat{ACE}$ cắt AE tại P'. Trong tam giác ABE, qua P' kẻ đường thẳng song song với BE, cắt AB tại P_0

Ta có: vì CP' là phân giác $\widehat{ACE}$ nên: $\dfrac{AP'}{EP'} = \dfrac{AC}{EC} = \dfrac{AC}{BD}$ (1);

$P_0P' \,//\, BE \Rightarrow \dfrac{AP_o}{BP_o} = \dfrac{AP'}{EP'}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{AP_o}{BP_o} = \dfrac{AC}{BD}$. Từ P_o ta sẽ dựng được (α).

Bài 8.



HD: * KI // CC' (1)

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, B'C', BB'.

Trong tam giác APM: $\dfrac{AG}{AP} = \dfrac{2}{3} = \dfrac{AI}{AM}$

$\Rightarrow$ GI // MP (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ (IKG) // (BB'C'C).

* Ta có: AI // A'K.

BN $\subset$ (A'KG); MC' $\subset$ (AIC'); BN // MC'.

Vậy (A'KG) // (AIC').

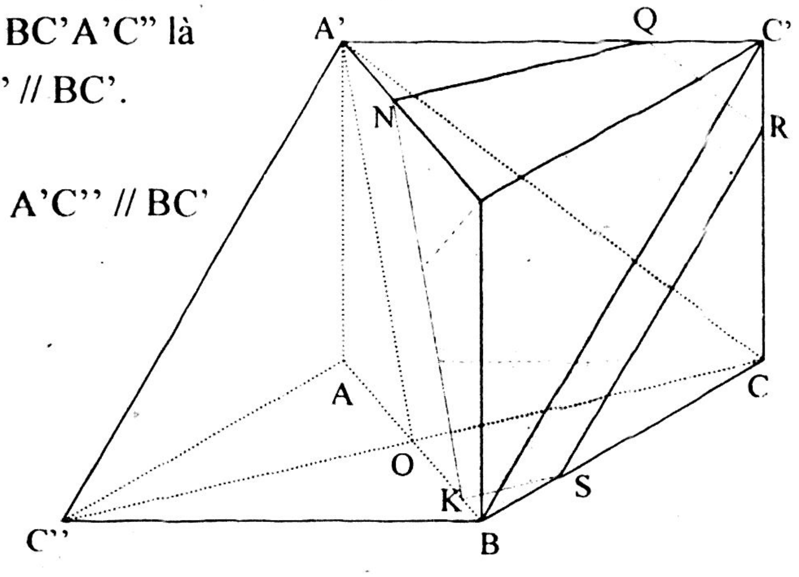
Bài 9.

HD: * Gọi C'' là điểm đối xứng của C qua trung điểm O của AB. Ta có: BC'A'C'' là hình bình hành $\Rightarrow$ A'C'' // BC'.

Do (P) // A'C và BC';

A'C; A'C''$\subset$ (A'CC''); A'C'' // BC'

$\Rightarrow$ (P) // (A'CC'').



+ Giao tuyến của (A'CC'') và (AA'B'B) là AO $\Rightarrow$ giao tuyến của (P) và (AA'B'B) là đường thẳng qua M, song song với AO, cắt AB, A'B' lần lượt tại K, N.

+ Giao tuyến của (A'CC'') và (ABC) là OC $\Rightarrow$ giao tuyến của (P) và (ABC) là đường thẳng qua K, song song với OC, cắt BC tại S.

+ Vì (P) // BC' nên giao tuyến của (P) và (BB'C'C) **là đường thẳng** qua S, song song với BC', cắt CC' tại R.

+ Giao tuyến của (A'CC") và (AA'C'C) là A'C ⇒ **giao tuyến của** (P) và (AA'C'C) là đường thẳng qua R, song song với A'C, **cắt A'C' tại** Q.

Ngũ giác KSRQN là thiết diện cần tìm.

* Tính $\frac{RC'}{RC}$.

Ta có: $\frac{RC'}{RC}=\frac{SB}{SC}=\frac{KB}{KO}=\frac{OB-OK}{OK}=\frac{OB}{OK}-1=\frac{AB}{2OK}-1$;

Mặt khác: $\frac{NB'}{AK}=\frac{MB'}{MA}=\frac{4}{5}\Rightarrow\frac{AB-OK}{\frac{AB}{2}+OK}=\frac{4}{5}\Rightarrow\frac{\frac{AB}{OK}-1}{\frac{AB}{2OK}+1}=\frac{4}{5}$;

Đặt $x=\frac{AB}{OK}$, ta có: $\frac{2(x-1)}{x+2}=\frac{4}{5}\Rightarrow x=3$.

Vậy $\frac{RC'}{RC}=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$.

CHƯƠNG 3: VEC TƠ TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

§1. VEC TƠ TRONG KHÔNG GIAN. SỰ ĐỒNG PHẲNG CỦA CÁC VEC TƠ

Bài 1:

1) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CP}$

$$=\overrightarrow{BC}\cdot\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}+\overrightarrow{CA}\cdot\frac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}}{2}+\overrightarrow{AB}\cdot\frac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}}{2}$$

$$=\frac{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}}{2}$$

$=\overrightarrow{0}.$

2) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=2\overrightarrow{IP}+2\overrightarrow{IQ}=2\left(\overrightarrow{IP}+\overrightarrow{IQ}\right)=\overrightarrow{0}$.

3)

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID}=4\overrightarrow{MI}.$

4) Giả sử có J sao cho:

$$\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}=\overrightarrow{0}$$
$$\Rightarrow 4\overrightarrow{JI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{0}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{JI}=\overrightarrow{0}\text{ hay } J=I.$$

Bài 2:

1) Ta có: $3\overrightarrow{BG}=3\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC}$

$$=(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GA})+(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GB'})+(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GC})$$
$$=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD'}$$

2) Ta có: $(\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{BD'})+(\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{BD'})+(\overrightarrow{BR}+\overrightarrow{BD'})$

$$=2\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{BC}\right)=2\overrightarrow{BD'}.$$

Suy ra: $\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{BR}+\overrightarrow{BD'}=\overrightarrow{0}$.

Vậy B là trọng tâm của $PQRD'$.

Bài 3: Ta có:

$$2DA^2+DB^2-DC^2=2\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{ID}\right)^2+\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{ID}\right)^2-\left(\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{ID}\right)^2$$

$$=2(\overrightarrow{IA}^2-2\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{ID}^2)+(\overrightarrow{IB}^2-2\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{ID}^2)-(\overrightarrow{IC}^2-2\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{ID}^2)$$
$$=2\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{IB}^2-\overrightarrow{IC}^2+2\overrightarrow{ID}^2+2\overrightarrow{ID}(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC})$$
$$=2IA^2+IB^2-IC^2+2ID^2.$$

Bài 4:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA};\ \overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB};\ \overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}.$$

Bài 5: Ta có: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}$.

Từ giả thiết:

$$\frac{\overline{MD}}{\overline{MB}}=m\Rightarrow\overrightarrow{MD}=\frac{m}{m-1}\overrightarrow{BD}\Rightarrow\overrightarrow{MD}=\frac{m}{m-1}\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\right)$$

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NC}}=n\Rightarrow\overrightarrow{NC}=\frac{1}{1-n}\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{CN}=\frac{1}{n-1}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)$$

Từ đó suy ra:

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{1-m}\overrightarrow{DA}+\left(\frac{1}{1-m}+\frac{1}{n-1}\right)\overrightarrow{AB}+\frac{n}{1-n}\overrightarrow{BC}.$$

Bài 6:

1) Ta có:

$$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD'}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BB'}$$

$$\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{MC'}+\overrightarrow{C'Q}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{DC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BB'}$$

$$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{MQ}.$$

Vậy PQ đi qua M và M là trung điểm của PQ.

2) Ta có: $\overrightarrow{PQ}=2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}+3\overrightarrow{BB'}$.

Suy ra: $\overrightarrow{PQ}^2=(2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}+3\overrightarrow{BB'})^2$

$$=4\overrightarrow{AB}^2+4\overrightarrow{AD}^2+9\overrightarrow{BB'}^2=4a^2+4a^2+9a^2=17a^2$$

$$\Rightarrow PQ=a\sqrt{17}.$$

Bài 7: Chọn $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$.

Ta có:

$$\overrightarrow{AG_2}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right).$$

$$\overrightarrow{AB_1}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{3}\left(\vec{b}+\vec{c}\right).$$

$$\overrightarrow{AC_1}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{c}\right).$$

$$\overrightarrow{AD_1}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}\right).$$

Suy ra: $\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{AD_1}\right) = \frac{2}{9}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) = \frac{2}{9}\overrightarrow{AG_2}$.

Vậy A, G_1, G_2 thẳng hàng.

Bài 8: Chọn $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CC'} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$

Vì D, M, A thẳng hàng nên:

$$\overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DA} = x\vec{a}\ .$$

Vì M, N, P thẳng hàng nên:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CN} &= \alpha\overrightarrow{CM} + (1-\alpha)\overrightarrow{CP} = \alpha(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DM}) + (1-\alpha)\overrightarrow{CP}\\ &= \alpha(\vec{c} + x\vec{a}) + (1-\alpha)\frac{3}{2}\vec{b} = \alpha x\vec{a} + \frac{3}{2}(1-\alpha)\vec{b} + \alpha\vec{c}.\end{aligned}$$

Vì B, N, D' thẳng hàng nên:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CN} &= \beta\overrightarrow{CD'} + (1-\beta)\overrightarrow{CB}\\ &= \beta(\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{CD}) + (1-\beta)\overrightarrow{CB}\\ &= \beta(\vec{b} + \vec{c}) + (1-\beta)\vec{a}\\ &= (1-\beta)\vec{a} + \beta\vec{b} + \beta\vec{c}.\end{aligned}$$

Từ đó suy ra:

$$\begin{cases}\alpha x = 1-\beta\\ \frac{3}{2}(1-\alpha) = \beta\\ \alpha = \beta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = \beta = \frac{3}{5}\\ x = \frac{2}{3}\end{cases}$$

Vậy: $\overrightarrow{DM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DA}$

Suy ra: $\frac{MD}{MA} = 2$.

Bài 9: Chọn $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$

Khi đó: $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$; $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$; $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

Suy ra: $\overrightarrow{EN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{AI}$.

Suy ra: $EN // AI$.

Bài 10:

1) Từ:

$$\frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MC'}} = m \Rightarrow \overrightarrow{B'M} = \frac{\overrightarrow{B'A} - m\overrightarrow{B'C'}}{1-m} = \frac{1}{1-m}\vec{a} + \frac{1}{1-m}\vec{b} - \frac{m}{1-m}\vec{c}.$$

$$\frac{\overrightarrow{NC}}{\overrightarrow{ND'}} = n \Rightarrow \overrightarrow{B'N} = \frac{\overrightarrow{B'C} - n\overrightarrow{B'D}}{1-n} = \frac{n}{n-1}\vec{a} + \frac{1}{1-n}\vec{b} + \vec{c}.$$

2) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{B'N} - \overrightarrow{B'M} = \left(\dfrac{n}{n-1} - \dfrac{1}{1-m}\right)\vec{a} + \left(\dfrac{1}{1-n} - \dfrac{1}{1-m}\right)\vec{b} + \dfrac{1}{1-m}\vec{c}$

Vì $MN // BD'$ nên $\overrightarrow{MN} = \alpha\overrightarrow{B'D} = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} + \alpha\vec{c}$

$$\alpha = \frac{n}{n-1} - \frac{1}{1-m} = \frac{1}{1-n} - \frac{1}{1-m} = \frac{1}{1-m}.$$

$\Rightarrow m = -3;\ n = -1.$

Bài 11: Ta có: $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{NA}{ND} = |k|$

Từ giả thiết suy ra:

$$\overrightarrow{AD} = \frac{|k|+1}{|k|}\overrightarrow{AN}$$

$$\overrightarrow{BC} = \frac{|k|+1}{|k|}\overrightarrow{BM}$$

Ta có: $\overrightarrow{PQ} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right) = \dfrac{|k|+1}{2|k|}\left(\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BM}\right) = \dfrac{|k|+1}{2|k|}\left(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{PN}$ đồng phẳng hay bốn điểm P, Q, M, N nằm trên một mặt phẳng

Bài 12: Đặt $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{DD'} = \vec{b}$.

Khi đó:

$$\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}\left(\vec{c} - \vec{a} + \vec{c} + \vec{b}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{DC'}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC'} - \overrightarrow{DA'} + \overrightarrow{DC'}\right)$$

$$= \overrightarrow{DC'} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DA'}.$$

Vậy $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{DC'}$, $\overrightarrow{DA'}$ đồng phẳng hay $MN //$ mp$(DA'C')$.

Bài 13: Chọn $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BB'} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$.

Ta có: $\overrightarrow{BD'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MD}} = \frac{\overline{ND}}{\overline{NB}} = k \text{ nên } \overrightarrow{MA} = \frac{k}{1-k}\overrightarrow{AD'};\ \overrightarrow{NB} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{BD}$$

Suy ra: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM}$

$$= \frac{k}{1-k}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) + \frac{1}{1-k}\vec{c}$$

$$= \frac{k}{1-k}\overrightarrow{BD'} + \frac{1}{1-k}\overrightarrow{BC}$$

Vậy $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{BD'}$, $\overrightarrow{BC}$ đồng phẳng. Do đó $MN \,//\, (A'D'CB)$.

Bài 14: Chọn $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$.

Ta có: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}\vec{a}$.

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC'}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{c} + \vec{c}\right) = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}.$$

$$\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB'} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AN}.$$

Suy ra: $MG \,//\, \text{mp}(AB'N)$.

Mặt khác, $\overrightarrow{MC'} = \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c} = \overrightarrow{AN}$.

Suy ra $MC' \,//\, \text{mp}(AB'N)$. Do đó $\text{mp}(MGC') \,//\, \text{mp}(AB'N)$.

Bài 15: Đặt $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$.

Khi đó: $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

$$\overrightarrow{AN} = -\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}.$$

$$\overrightarrow{AP} = -\vec{a} + k\vec{c}.$$

$$\overrightarrow{AQ} = -\frac{1}{2}\vec{a}.$$

Suy ra: $\overrightarrow{MN} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c}$.

$$\overrightarrow{MP} = -\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + k\vec{c}.$$

$$\overrightarrow{MQ} = -\frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}.$$

Để M, N, P, Q đồng phẳng thì:

$$\overrightarrow{MP} = x\overrightarrow{MN} + y\overrightarrow{MQ}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + k\vec{c} = -\frac{2}{3}x\vec{a} + \frac{2}{3}x\vec{c} - \frac{1}{6}y\vec{a} - \frac{1}{3}y\vec{b}$$

Suy ra:

$$\begin{cases} -\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{6}y=-\dfrac{2}{3} \\ \qquad -\dfrac{1}{3}y=-\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{3}x \qquad =k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{4} \\ y=1 \\ k=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy với $k=\frac{1}{2}$ thì M, N, P, Q đồng phẳng.

Bài 16: Chọn $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{c}$.

Ta có: $E \in CM$ nên $\overrightarrow{CE}=m\overrightarrow{CM}=m\left(\overrightarrow{a}+\frac{3}{4}\overrightarrow{c}\right)$

$F \in A'N$ nên $\overrightarrow{NF}=n\overrightarrow{NA'}=n\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{c}+\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)$.

$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{NF}=n\overrightarrow{a}+(1-n)\overrightarrow{b}+\left(\frac{3n}{4}+\frac{1}{4}\right)\overrightarrow{c}$

Suy ra: $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CF}-\overrightarrow{CE}=(n-m)\overrightarrow{a}+(1-n)\overrightarrow{b}+\left(\frac{3n}{4}-\frac{3m}{4}+\frac{1}{4}\right)\overrightarrow{c}$

Vì $EF \,//\, B'P$ nên $\overrightarrow{EF}=k\overrightarrow{PB'}$.

Hay $(n-m)\overrightarrow{a}+(1-n)\overrightarrow{b}+\left(\frac{3n}{4}-\frac{3m}{4}+\frac{1}{4}\right)\overrightarrow{c}=k\left(\overrightarrow{b}+\frac{3}{4}\overrightarrow{c}\right)$

Suy ra:

$$\begin{cases} n-m=0 \\ 1-n=k \\ \dfrac{3n}{4}-\dfrac{3m}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3k}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=n=\dfrac{2}{3} \\ k=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BP'}$. Do đó: $\frac{EF}{PB'}=\frac{1}{3}$.

Bài 17: Chọn $\overrightarrow{C'B'}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{C'C}=\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{C'D}=\overrightarrow{c}$

Ta có $\overrightarrow{C'P}=-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}\right)$

Vì A, M, B thẳng hàng nên:

$$\overrightarrow{C'M} = \alpha\overrightarrow{C'A} + (1-\alpha)\overrightarrow{C'B}$$

$$= \vec{a} + \vec{b} + \alpha\vec{c}.$$

Vì M, N, P thẳng hàng nên:

$$\overrightarrow{C'N} = \beta\overrightarrow{C'M} + (1-\beta)\overrightarrow{C'P}$$

$$= \left(\frac{3}{2}\beta - \frac{1}{2}\right)\vec{a} + \beta\vec{b} + \left(\beta\alpha - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\beta\right)\vec{c}.$$

Hơn nữa B', N, C thẳng hàng nên:

$$\overrightarrow{C'N} = \gamma\overrightarrow{CC'} + (1-\gamma)\overrightarrow{C'B'} = \gamma\vec{b} + (1-\gamma)\vec{a}$$

Từ đó suy ra:

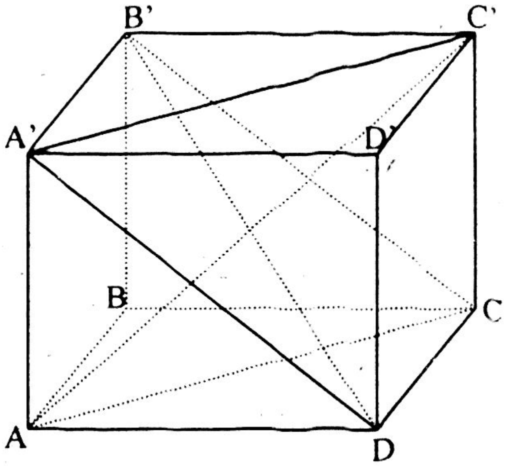
$$\begin{cases} \frac{3}{2}\beta - \frac{1}{2} = 1-\gamma \\ \beta = \gamma \\ \beta + \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{3} \\ \beta = \gamma = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Vậy: $\overrightarrow{C'M} = \frac{1}{3}\overrightarrow{C'A} + \frac{2}{3}\overrightarrow{C'B} \Leftrightarrow \frac{MA}{MB} = 2$

$$\overrightarrow{C'N} = \frac{5}{3}\overrightarrow{C'C} + \frac{2}{5}\overrightarrow{C'B'} \Leftrightarrow \frac{NC}{NB'} = \frac{2}{3}$$

§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Bài 1: Chọn hệ vectơ $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$.



Khi đó: $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = \left|\vec{c}\right| = a$

$$\vec{a}.\vec{b} = -\frac{a^2}{2} = \vec{a}.\vec{c}$$

$$\vec{a}.\vec{b} = \frac{a^2}{2}$$

a) Ta có: $AB \,//\, A'B$ nên:

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'D}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'D}}\right)$$

và là góc $\widehat{DA'B'}$ hoặc $180^\circ - \widehat{DA'B'}$.

$$A'D = a\sqrt{3};\ A'B' = a;\ \overrightarrow{DB'} = \vec{b} - \vec{c} + \vec{a} \Rightarrow DB' = a\sqrt{2}.$$

Khi đó suy ra: $\cos\widehat{DA'B'} = \dfrac{a^2 + 3a^2 - 2a^2}{2a.a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy góc $\left(\widehat{A'D, AB}\right) = arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

* Ta có $AB' = a = AD$; $AC' = B'D = a\sqrt{2}$.

Nên $ADC'B'$ là hình vuông, vậy $AC' \perp B'D$.

Hay $\left(\widehat{AC'', B'D}\right) = 90^o$

b) Đáp số: $S_{A'B'CD} = a^2\sqrt{2}$

$S_{ACC'A'} = a^2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn:

$$S_{ACC'A'} = AC.CC'.\sin\widehat{ACC'}$$

Trong đó: $AC'^2 = AC^2 + CC'^2 - 2AC.CC'.\cos\widehat{ACC'}$

Suy ra: $\cos\widehat{ACC'} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin ACC' = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

Từ đó suy ra: $S_{ACC'A'}$.

c)* $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Suy ra $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AB} = a^2 = \left|\overrightarrow{A'C}\right|.\left|\overrightarrow{AB}\right|.\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AB}}\right)$

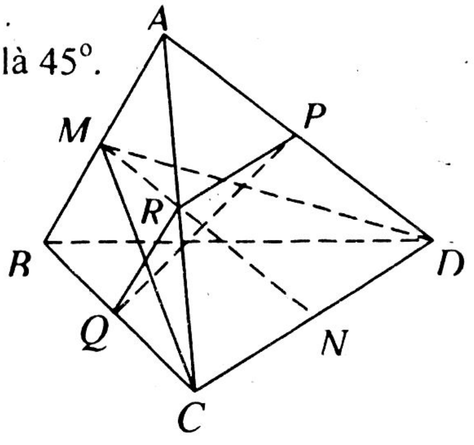
Do đó $\cos\left(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AB}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Vậy góc giữa hai đường thẳng AC' và AB là 45^o.

* Tương tự, $(AD, AC') = 45^o$.

* $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AA'} = \left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right).\vec{c} = 0$.

Vậy $\left(\widehat{\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AA'}}\right) = 90^o$.



Bài 2:

a)* Ta có $CM = DM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Suy ra ΔCMD cân tại M.

Do đó $MN \perp CD$.

Mà $CD \,//\, RP$ nên $MN \perp RP$.

* Tương tự: $MN \perp RQ$.

b) Ta có $QP \perp AD$.

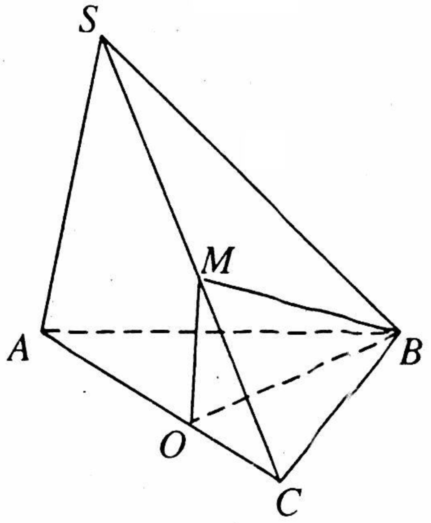
Trong ΔQDP ta có $QP^2 = QD^2 - DP^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$

Suy ra $RQ^2 + RP^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2} = QP^2$

Vậy $RQ \perp RP$.

Mà $AB \,//\, RQ$; $CD \,//\, RP$ nên $AB \perp CD$.

Bài 3:



a) Ta có: $\alpha \,//\, SA$ nên

$\alpha \cap (SAC) = OM \,//\, SA$.

Vậy thiết diện là ΔBMO.

Hơn nữa $OB \perp SA$

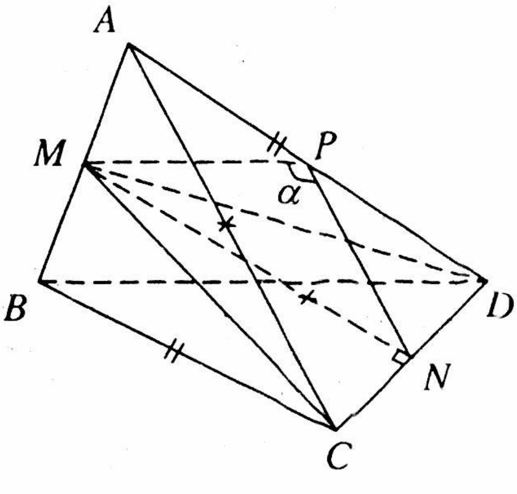
$OM \,//\, SA$

Suy ra $OB \perp OM$.

Do đó ΔBMO vuông.

b) $S = \frac{1}{2}BO.OI = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$

Bài 4:



a) Gọi M, N là trung điểm của AB và CD.

Ta có $\Delta ACD = \Delta BDC$

Suy ra $AN = BN$ hay ΔABN cân tại N.

Do đó: $MN \perp AB$.

Tương tự $MN \perp CD$.

b) Gọi P là trung điểm của AD.

Ta có $MP \,//\, BD$; $NP \,//\, AC$

Gọi $\widehat{MPN} = \alpha$.

Khi đó $\cos\left(\widehat{AC;BD}\right) = |\cos\alpha|$

Ta có $CM^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$

Do đó, $MN^2 = CM^2 - CN^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$

$$\text{Vậy } \cos\alpha = \frac{PM^2 + PN^2 - MN^2}{2PM.PN} = \frac{\frac{b^2}{4} + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}}{\frac{b^2}{2}} = \frac{a^2 - c^2}{2}$$

Suy ra $\cos\left(\widehat{AC;BD}\right) = \left|\frac{a^2 - c^2}{b^2}\right|$.

Hay góc giữa AC, BD là $\beta = arccos\left|\dfrac{a^2 - c^2}{b^2}\right|$.

Bài 5:

a) Gọi α là mặt phẳng qua M và $\alpha // SB$; $\alpha // OA$.

Ta có $SB \subset (SCA)$; $\alpha \cap (SAB) = MQ$.

Nên $MQ // SB$.

Tương tự $SB \subset (SBC)$; $\alpha \cap (SBC) = NP$.

Nên $NP // SB$.

Vậy $MQ // NP$.

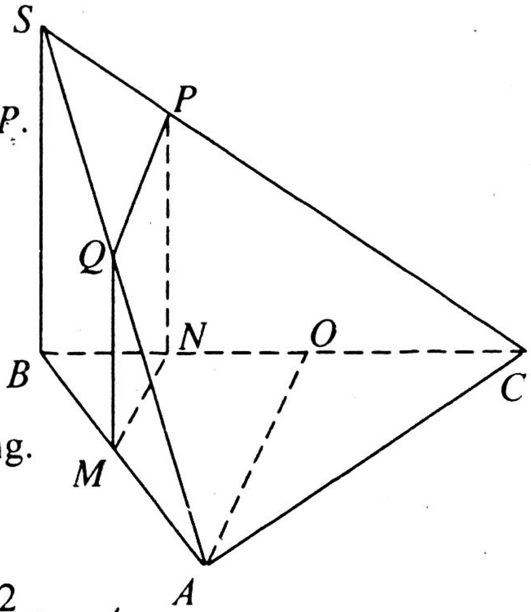
Hơn nữa,

$OA \subset (ABC)$; $\alpha \cap (ABC) = MN$.

Nên $MN // OA$.

Như vậy, $MQ \perp MN$ (vì $SB \perp OA$).

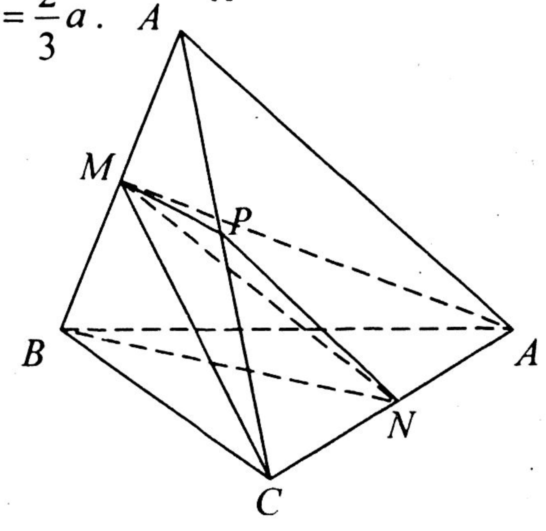
Từ đó, suy ra $MNPQ$ là hình thang vuông.



b) Đáp số: $S = \dfrac{x(4a - 3x)}{4}$.

S đạt giá trị lớn nhất khi $x = \dfrac{2}{3}a$.

Bài 6:



a) Ta có: $DM = CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra ΔCMD cân.

Do đó $MN \perp CD$.

Hơn nữa, $MN^2 = CM^2 - CN^2 = \dfrac{a^2}{4}$

$$BN^2 = \frac{a^2}{2}$$

Suy ra $BM^2 + MN^2 = \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{a^2}{2} = BN$

Vậy $MN \perp BM$ hay $MN \perp AB$.

Do đó MN là đường vuông góc chung của AB và CD.

b) Ta có $BN = AN = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Suy ra: $BN^2 + AN^2 = a^2 = AB^2$

Do đó $BN \perp AN$.

c) Gọi P là trung điểm của AC.

Suy ra $MP // BC$; $PN // AD$.

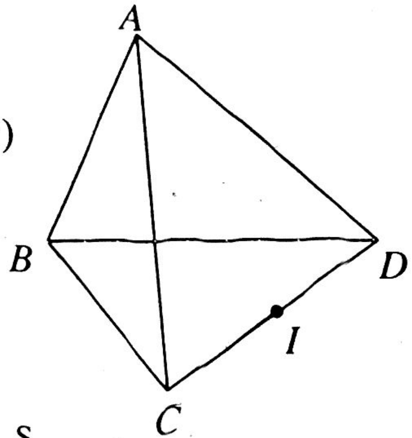
Vậy $(\widehat{AD, BC}) = (\widehat{MP, PN})$

Ta có $MP = \frac{a}{2} = PN = MN$

Suy ra ΔMNP là đều.

Do đó $(\widehat{AD, BC}) = 60^o$

Bài 7:



a) Ta có $AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AD}^2 = \overrightarrow{BC}^2 - \overrightarrow{BD}^2$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD})(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD})$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{DC}$ (I là trung điểm CD)

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BI}).\overrightarrow{DC} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} = 0 \quad \Leftrightarrow AB \perp CD.$

b) Cho $AB \perp DC$ và $AC \perp BD$.

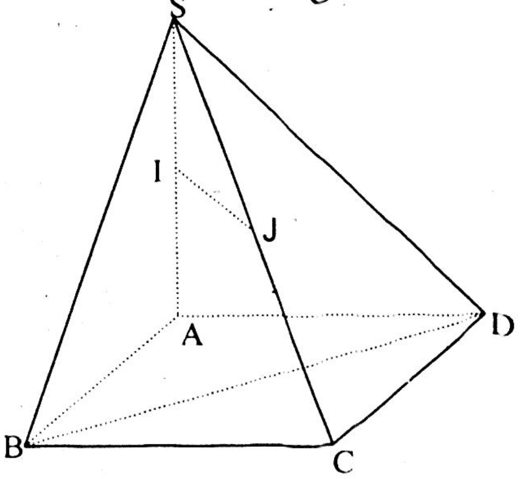
Suy ra $AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$

$AB^2 - AD^2 = CB^2 - CD^2$

Suy ra: $AB^2 - AC^2 = DB^2 - DC^2$

Hay $AD \perp BC$.

Bài 8:



a) Ta có:

$$\left.\begin{matrix} SA \perp BC \\ BC // AD \end{matrix}\right\} \Rightarrow SA \perp AD.$$

Mặt khác $SA = AD = a$.

Nên ΔSAD vuông cân.

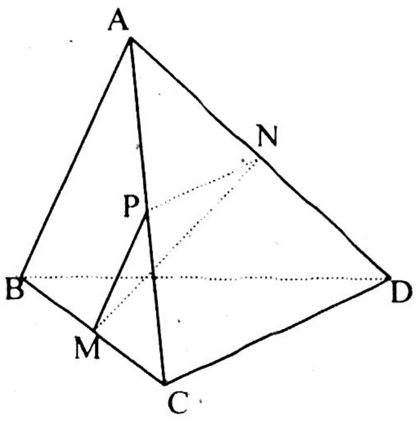
b) Ta có $AD // BC$ nên

$(\widehat{SD, BC}) = (\widehat{SD, AD}) = \widehat{SDA} = 45^o$.

c) Ta có:

$$\left.\begin{matrix} IJ // AC \\ BD \perp AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow IJ \perp BD$$

Vậy $(\widehat{IJ, BD}) = 90^o$.



Bài 9: Ta có $PN = a\sqrt{2}$; $PM = a$;

$(\widehat{AB, CD}) = (\widehat{IM, IN})$

Đặt $\alpha = \widehat{MIN}$;

ta có: $\cos\alpha = \dfrac{IM^2 + IN^2 - MN^2}{2IM.IN} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Suy ra $\alpha = 135^o$ hay ta có $(\widehat{AB, CD}) = 45^o$.

§3. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG.

Bài 1:

a) Ta có: $BC \perp AI$ (vì ΔABC đều)

$BC \perp DI$ (vì ΔBCD đều).

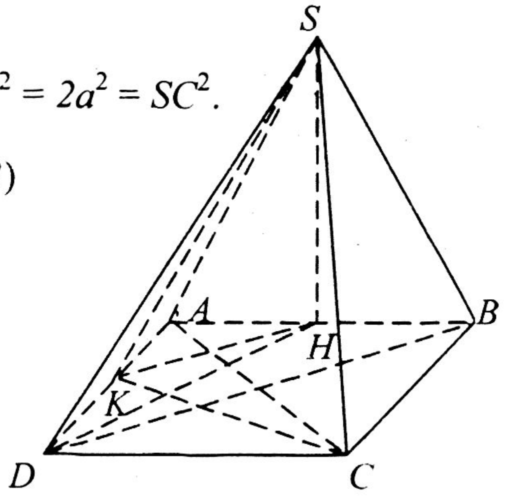
Suy ra $BC \perp (AID)$.

b) Ta có: $AH \perp BC$ vì $BC \perp (AID) \supset AH$

$AH \perp ID$

Suy ra $AH \perp (BCD)$.

Bài 2:



a) Ta có $SH \perp AB$.

Mặt khác, ΔSBC vuông vì $SB^2 + BC^2 = 2a^2 = SC^2$.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Suy ra} & BC \perp SB \\ \text{Hơn nữa} & BC \perp AB\end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB)$$

Do đó $BC \perp SH$.

Vậy $SH \perp (ABCD)$.

b) * Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} AC \perp BD \\ HK // BD \end{array}\right\} \Rightarrow AC \perp HK$$

Mà $AC \perp SH$ vì $SA \perp (ABCD)$.

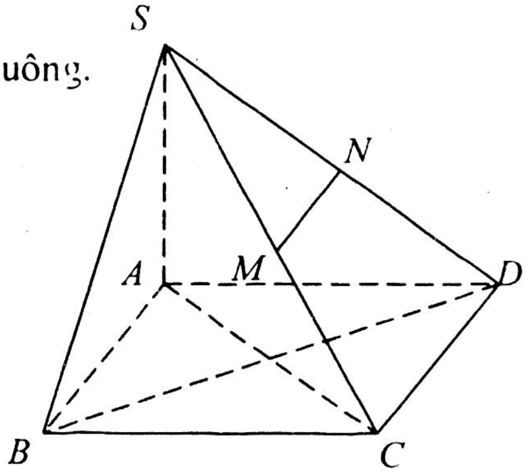
Suy ra $AC \perp (SHK) \Rightarrow AC \perp SK$.

* Vì $ABCD$ là hình vuông nên $CK \perp DH$.

Mặt khác, $CK \perp SH$ vì $SH \perp (ABCD) \supset CK$

Suy ra $CK \perp (SHD) \Rightarrow CK \perp SD$.

Bài 3:



a) Ta có $DB \perp AC$ vì $ABCD$ là hình vuông.

$DB \perp SA$ vì $SA \perp (ABCD)$.

Suy ra $DB \perp (SAC)$.

b) Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow CD \perp (SAD)$$

Mà $MN // CD$ nên $MN \perp (SAD)$.

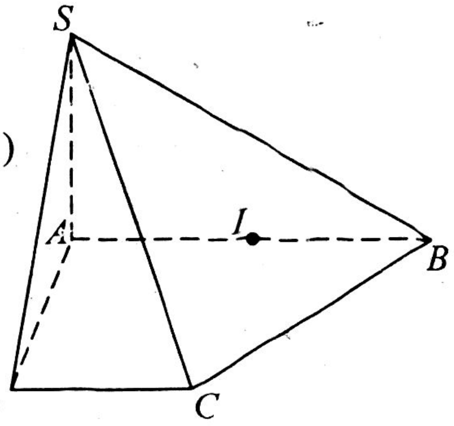
Bài 4:

a) Ta có $SA \perp (ABCD)$.

Suy ra $SA \perp AB$; $SA \perp AD$.

Vậy các tam giác SAB; SAD vuông.

Mặt khác, $\left.\begin{array}{l} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow CD \perp (SAD)$



Do đó $CD \perp SD$ nên ΔSCD vuông.

Hơn nữa, $BC \perp AC$

(vì $ABCD$ là hình thang $\frac{AB}{2} = AD = DC$)

$BC \perp SA$.

Suy ra $BC \perp (SAC)$

$\Rightarrow BC \perp SC$ hay tam giác SBC vuông.

b) Ta có:

$\left.\begin{array}{l} CI \perp AB \\ CI \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow CI \perp (SAB) \Rightarrow CI \perp SB$.

Ta có:

$\left.\begin{array}{l} DI \perp AC \\ DI \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow DI \perp (SAC) \Rightarrow DI \perp SC$.

Bài 5:

a) Gọi O là trung điểm của A_1C.

Ta có ΔA_1MC cân (Vì $\Delta A_1AM = \Delta CDM$)

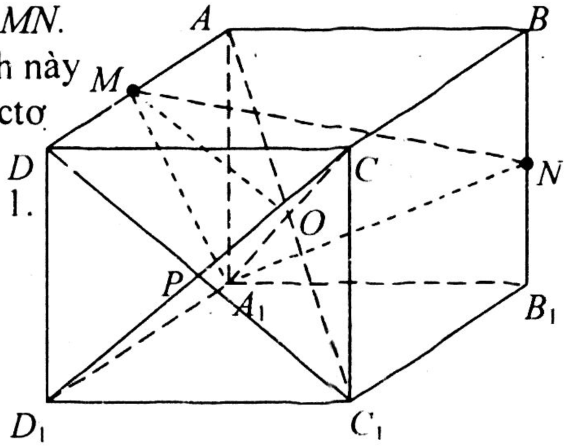
Suy ra $MO \perp A_1C$.

Tương tự ΔA_1NC cân nên $NO \perp A_1C$.

Vậy $A_1C \perp (OMN)$. Do đó $A_1C \perp MN$.

Chú ý: Đối với bài toán theo mô hình này ta có thể sử dụng phương pháp vectơ đơn giản hơn.

b) Học sinh giải tương tự bài 4 dạng 1.



Bài 6:

a) Học sinh tự chứng minh.

b) $\left.\begin{array}{l} {}^*CH \perp AB \\ CH \perp AD\,(\text{vì } AD \perp (ABC)) \end{array}\right\} \Rightarrow CH \perp (ABD)$

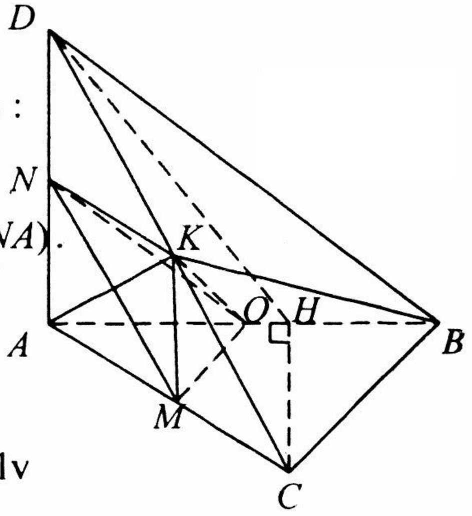
Vậy $CH \perp DH$ hay tam giác CHD vuông.

*Ta có $\left.\begin{array}{l} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAC)$

$\left.\begin{array}{ll} \text{Suy ra} & BC \perp AK \\ \text{Mặt khác} & DC \perp AK \end{array}\right\} \Rightarrow AK \perp (DBC)$

Do đó $AK \perp KB$ hay tam giác AKB vuông.

c) * Ta có $\left.\begin{array}{l} MO // BC \\ BC \perp (DAC) \end{array}\right\} \Rightarrow MO \perp (DAC) \Rightarrow MO \perp MN$



Vậy tam giác MON vuông.

* Vì tam giác ADC vuông, $AK \perp DC$ nên :

$\widehat{MKA} = \widehat{KAM}$ (vì $KM = AM = MC$)

$\widehat{KAM} = \widehat{NDK} = \widehat{NKD}$ (vì $NK = ND = NA$).

Suy ra $\widehat{MKA} = \widehat{NDK}$.

Tương tự $\widehat{NKA} = \widehat{ACK}$.

Trong đó

$\widehat{NDK} + \widehat{ACK} = 1v \quad \Rightarrow \widehat{MKA} + \widehat{NKA} = 1v$

Vậy $\widehat{MKN} = 1v$ hay tam giác MKN là tam giác vuông.

Ta có $NK \perp KM$. (theo trên).

Mặt khác $OM \perp (DAC) \Rightarrow OM \perp NK$.

Vậy $NK \perp (KMO) \Rightarrow NK \perp KO$ hay tam giác NKO vuông.

Bài 7:

a) * Ta có $\left.\begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp SB \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

Suy ra $BC \perp SA$.

Hơn nữa $\left.\begin{array}{l} DC \perp AD \\ DC \perp SD \end{array}\right\} \Rightarrow DC \perp (SAD)$

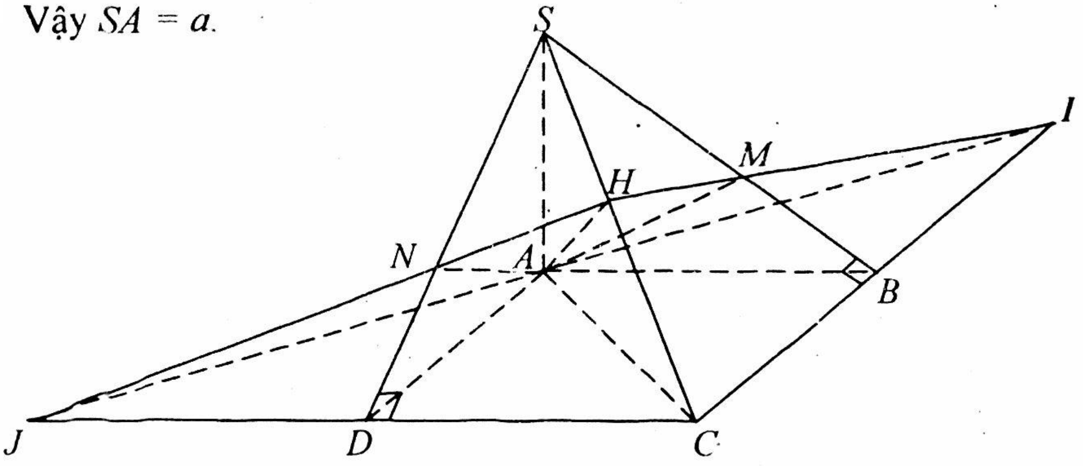
Suy ra $DC \perp SA$.

Vậy $SA \perp (ABCD)$.

* Ta có $SB^2 = SC^2 - BC^2 = 2a \Rightarrow SB = a\sqrt{2}$.

Do đó $SA^2 = SB^2 - AB^2 = 2a^2 - a^2 = a^2$

Vậy $SA = a$.



b) Ta có $\left.\begin{array}{l} IJ \perp AC \\ IJ \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow IJ \perp (SAC)$

$\left.\begin{array}{ll} \text{Suy ra} & IJ \perp SC \\ \text{Mặt khác} & AH \perp SC \end{array}\right\} \Rightarrow SC \perp (AIJ).$

$\left.\begin{array}{l} \text{Suy ra } SC \perp AM \\ \text{Mà} \quad BC \perp AM \quad \text{vì } BC \perp (SAB) \end{array}\right\} \Rightarrow AM \perp (SBC).$

* Tương tự học sinh tự chứng minh $AN \perp (SCD)$.

c) Vì $AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp MH$ hay tam giác AMH vuông tại M.

$$S_{\Delta AMH} = \frac{1}{2} AM.HM.$$

Trong đó vì $AM \perp (SBC)$ nên $AM \perp BC$:

$$\frac{1}{AM^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{2}{a^2} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Hơn nữa $AH \perp SA$ nên:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow AH = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$

Suy ra $HM^2 = AH^2 - AM^2 = \frac{4a^2}{5} - \frac{a^2}{2} = \frac{3a^2}{10} \Rightarrow HM = \frac{a\sqrt{30}}{10}$.

Vậy $S_{\Delta AMH} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{30}}{10} = \frac{a^2\sqrt{15}}{20}$.

Tương tự, học sinh tự tính.

$$S_{\Delta ANH} = \frac{1}{2}.AN.NH = \frac{a^2\sqrt{15}}{40}.$$

Vậy $S_{\Delta AMHN} = \frac{a^2\sqrt{15}}{20} + \frac{a^2\sqrt{15}}{40} = \frac{3a^2\sqrt{15}}{40}$.

Bài 8:

a) Theo giả thiết suy ra:

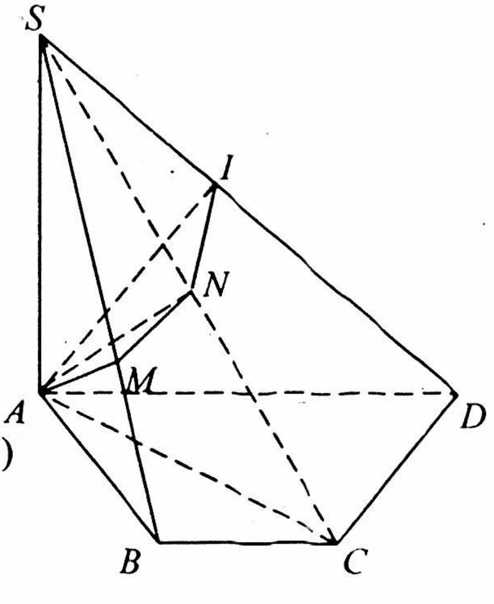
$$SD = a\sqrt{7};\ SI = \frac{3a\sqrt{7}}{7}.$$

$$SD.SI = 3a^2 = SA^2.$$

Suy ra $AI \perp SD$.

Tương tự $AM \perp SB$.

Mặt khác, $\left.\begin{array}{l} BD \perp AB \\ BD \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow BD \perp (SAB)$



Do đó $AM \perp BD$.

Vậy $AM \perp (SBD) \Rightarrow AM \perp SD$.

Từ đó suy ra $SD \perp (AMI)$.

b) Vì $SD \perp (AMI)$ nên $SD \perp AN$

Mặt khác, $\left.\begin{matrix} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow CD \perp (SAC) \Rightarrow CD \perp AN$.

Do đó $AN \perp (SCD) \Rightarrow AN \perp SC$.

Hơn nữa, tam giác SAC cân (*vì* $SA = AC = a\sqrt{3}$).

Suy ra AN là đường trung tuyến. Hay N là **trung điểm của** SC.

c) Vì $AN \perp (SCD)$ nên $AN \perp NI$.

Vì $AM \perp (SBD)$ nên $AM \perp MI$.

d) $S_{AMNI} = S_{ANI} + S_{AMN}$

Trong đó $AN = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$; $\cos\widehat{CSD} = \dfrac{SC}{SD} = \dfrac{\sqrt{42}}{7}$

$$\Rightarrow NI = \sqrt{SN^2 + SI^2 - 2SN.SI\cos\widehat{CSD}} = \frac{a\sqrt{42}}{14}$$

Vậy $S_{ANI} = \dfrac{3a^2\sqrt{7}}{28}$

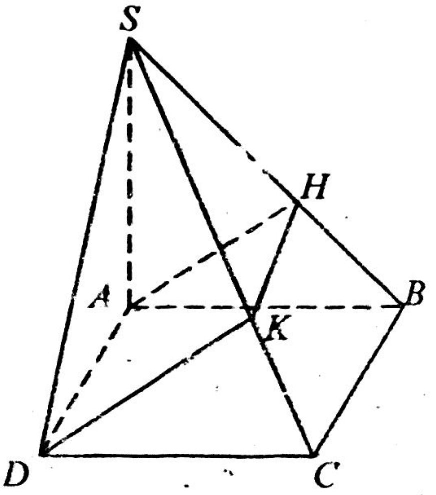
$$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2};\ AN = \frac{a\sqrt{6}}{2};\ \cos\widehat{BSC} = \frac{9}{4\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

Vậy $S_{AMN} = \dfrac{3a^2\sqrt{7}}{32}$.

Do đó $S_{AMNI} = \dfrac{45a^2\sqrt{7}}{224}$.

Bài 9:



a) Trong tam giác vuông SAB ta có

$SH.SB = SA^2$

$$\Rightarrow \frac{SH.SB}{SB^2} = \frac{SA^2}{SB^2}$$

$$\Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SA^2 + AB^2} = \frac{2a^2}{2a^2 + a^2} = \frac{2}{3}.$$

b) Ta có $\left.\begin{matrix} AD \perp SA \\ AD \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp SB$.

Mặt khác, $\left.\begin{matrix} AD\perp SB \\ AH\perp SB \end{matrix}\right\}\Rightarrow SB\perp(AHD)$

Hơn nữa, $A\in\alpha$; $\alpha\perp SB$ nên $(AHD)=\alpha$.

Vì $BC\,//\,AD\subset\alpha$ nên $\alpha\,//\,BC$.

Vậy $\alpha\cap(SBC)=HK\,//\,BC$ ($K\in SC$).

Từ đó suy ra thiết diện là tứ giác $AHKD$.

Mà $AD\,//\,HK$.

$AD\perp AH$ (vì $AD\perp(SAB)\supset AH$)

Do đó thiết diện là hình thang vuông tại A và D.

$$S_{AHKD}=\frac{1}{2}\left(AD+HK\right).AH$$

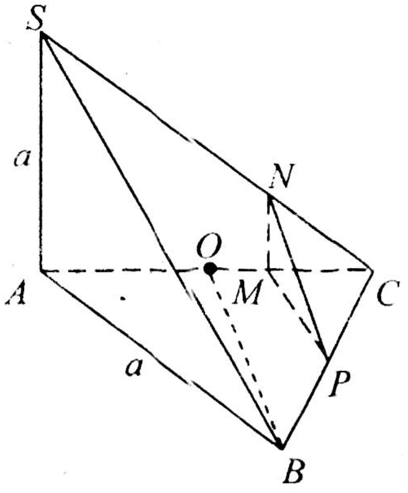
Trong đó, xét tam giác vuông SAB có $AH\,.\,SB=SA\,.\,AB$

$$\Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Xét tam giác SBC có $\dfrac{HK}{BC}=\dfrac{SH}{SB}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow HK=\dfrac{2}{3}a$.

Vậy $S_{AHKD}=\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{2}{3}a\right)\dfrac{a\sqrt{6}}{3}=\dfrac{5a^2\sqrt{6}}{18}$.

Bài 10:



a) * Nếu $0<x<\dfrac{a}{2}$ thì thiết diện là ΔMNP

trong đó $MN\,//\,SA$ ($N\in SC$)

$MP\,//\,BO$ ($P\in BC$)

Với O là trung điểm AC.

* Nếu $x=\dfrac{a}{2}$ thì thiết diện là ΔMNB.

Trong đó $MN\,//\,SA$ ($N\in SC$).

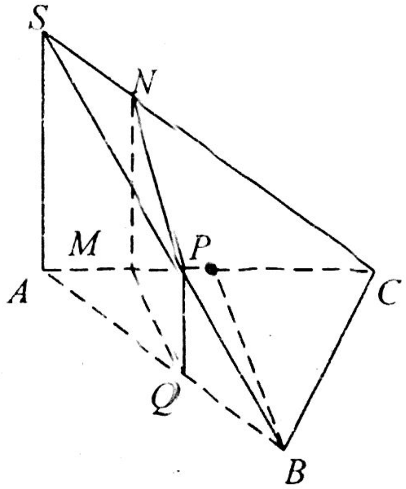
* Nếu $\dfrac{a}{2}<x<a$ thì thiết diện là hình thang vuông $MNPQ$, trong đó

$MN\,//\,SA$ ($N\in SC$)

$MQ\,//\,BO$ ($Q\in AB$)

$QP\,//\,SA$ ($P\in SB$).

b)

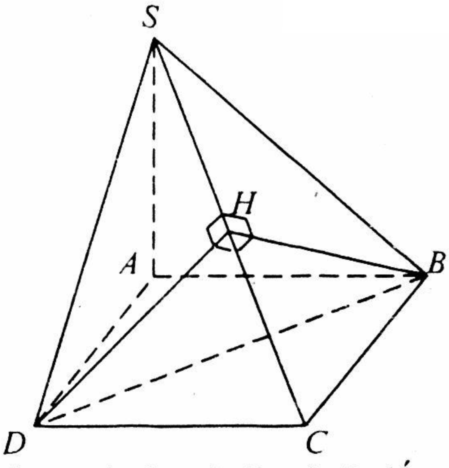


$$S_{thiết\ diện} = \begin{cases} \dfrac{x^2\sqrt{3}}{2} & \text{nếu } 0 < x \le \dfrac{a}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}(a-x)(3x-a) & \text{nếu } \dfrac{a}{2} < x < a \end{cases}$$

$$S_{max} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6} \text{ khi } x = \frac{2a}{3}.$$

§4. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

Bài 1:



a) Ta có $SA \perp (ABCD)$.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Suy ra} & SA \perp BC \\ \text{Mà} & AB \perp BC\end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB).$$

Vậy $(\widehat{(SBC);(ABCD)}) = \widehat{SBA}$.

Mặt khác, tam giác SAB vuông cân tại A nên $\widehat{SBA} = 45^\circ$

Hay $(\widehat{(SBC);(ABCD)}) = 45^\circ$.

b) Vì $\Delta SDC = \Delta SBC$ nên chân đường vuông góc hạ từ D, từ B đến SC của hai tam giác đó trùng nhau và gọi là điểm H.

Khi đó $(\widehat{(SDC);(SBC)}) = \widehat{DHB}$.

Ta có $BD = a\sqrt{2}$; $\dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{BC^2} + \dfrac{1}{BS^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{2a^2} = \dfrac{3}{2a^2}$

Suy ra $BH^2 = DH^2 = \dfrac{2a^2}{3}$.

$$\text{Vậy } \cos\widehat{BHD} = \frac{BH^2 + DH^2 - BD^2}{2DH.BH} = \frac{\dfrac{2a^2}{3} + \dfrac{2a^2}{3} - 2a^2}{2\cdot\dfrac{2a^2}{3}} = -\frac{1}{2}$$

Do đó góc giữa hai mặt phẳng là 60°.

Bài 2:

a) Ta có ΔAOC đều nên $OA = AC = a$.

ΔBOC vuông cân ở O nên $BC = a\sqrt{2}$.

ΔAOB cân ở O và $\widehat{AOB} = 120^\circ$ nên

$AB = 2\cdot\dfrac{OA\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{3}$

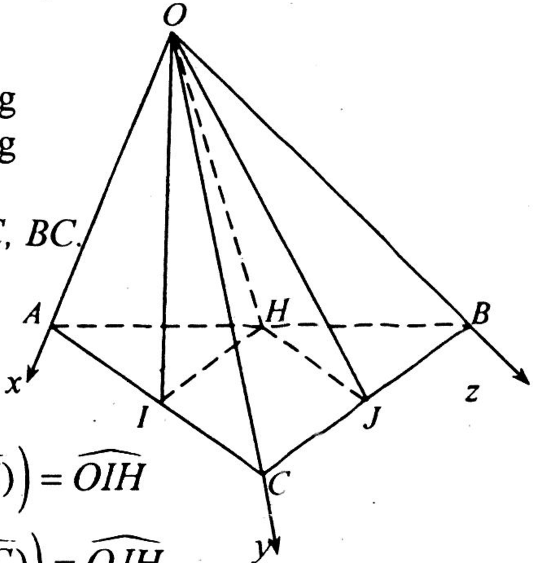
Từ đó suy ra $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Vậy ΔABC vuông tại C.

Vì $OA = OB = OC$ nên chân đường vuông góc H của O xuống mặt phẳng ABC chính là trung điểm của AC.

b) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC, BC.

Khi đó suy ra



$$OI \perp AB;\ IH \perp AB \text{ hay } \left(\widehat{(OAC);(ABC)}\right) = \widehat{OIH}$$

$$OJ \perp BC;\ HJ \perp BC \text{ hay } \left(\widehat{(OBC);(ABC)}\right) = \widehat{OJH}$$

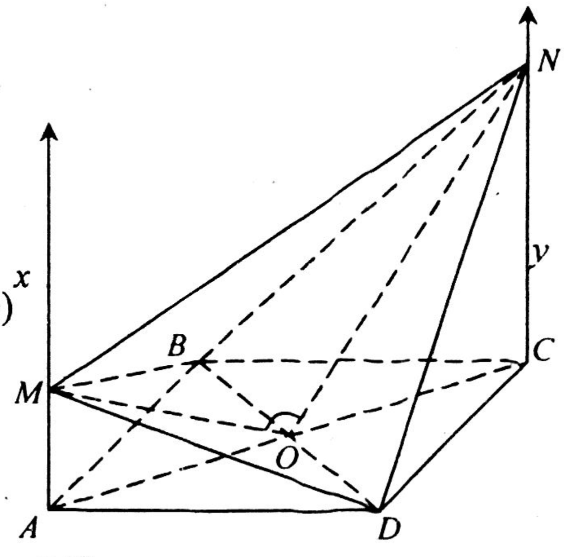
Ta có $\tan\widehat{OIH} = \dfrac{OH}{HI} = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow \widehat{OIH} = \arctan\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\widehat{OJH} = \frac{OH}{HJ} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow \widehat{OJH} = 45^\circ.$$

Bài 3:



a) Ta có $BD \perp OA$

$BD \perp MA$ (vì $MA \perp (ABCD)$)

Suy ra $BD \perp (MAO) \Rightarrow BD \perp MO$.

Tương tự ta có $BD \perp NO$.

Vậy $(\widehat{(MBD);(NBD)}) = \widehat{MON}$.

b) Ta có $(MBD) \perp (NBD) \Leftrightarrow \widehat{MON} = 90^\circ$

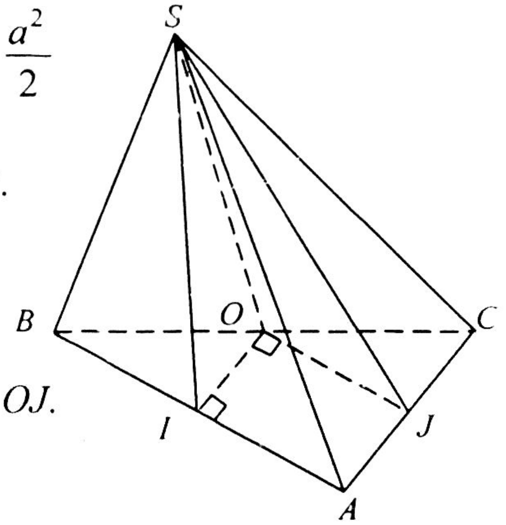
Suy ra $\widehat{MOA} + \widehat{NOC} = 90^\circ$

$\Rightarrow \tan\widehat{MOA} = \cot\widehat{NOC}$

Trong đó $\tan\widehat{MOA} = \dfrac{AM}{AO} = \dfrac{2x}{a\sqrt{2}}$

$$\tan\widehat{NOC} = \frac{CN}{OC} = \frac{2y}{a\sqrt{2}} \Rightarrow \cot\widehat{NOC} = \frac{a\sqrt{2}}{2y}$$

Từ đó suy ra $\dfrac{2x}{a\sqrt{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2y} \Leftrightarrow xy = \dfrac{a^2}{2}$



Bài 4:

a) Ta có $SO \perp (ABC) \Rightarrow (SBC) \perp ABC$.

b) Ta có $\left.\begin{matrix} SO \perp AB \\ OI \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \perp (SOI)$.

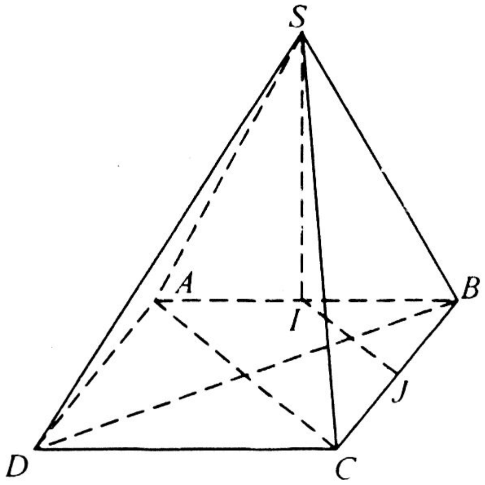
Suy ra $(SBC) \perp (SOI)$

c) Vì $SO \perp (ABC)$ nên $SO \perp OI$; $SO \perp OJ$.

Vậy $\left(\widehat{(SOI);(SOJ)}\right) = \widehat{IOJ}$.

Mà $\widehat{IOJ} = \widehat{CAB} = 90^\circ$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc).

Suy ra $(SOI) \perp (SOJ)$.



Bài 5:

a) Ta có $SI \perp (ABCD)$ nên

$\left.\begin{matrix} SI \perp AD \\ \text{mà } AB \perp AD \end{matrix}\right\} \Rightarrow AD \perp (SAB)$.

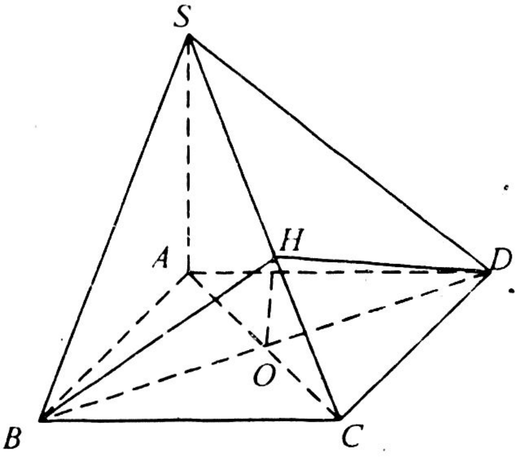
Suy ra $(SAD) \perp (SAB)$.

Tương tự ta có $(SBC) \perp (SAB)$.

b) Ta có $SI \perp BD$ (vì $SI \perp (ABCD)$)

$IJ \perp BD$.

Suy ra $BD \perp (SIJ)$ hay $(SBD) \perp (SIJ)$.



Bài 6:

a) Học sinh tự chứng minh.

b) Ta có $\left.\begin{matrix} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{matrix}\right\} \Rightarrow CD \perp (SAD)$.

Do đó, $(SCD) \perp (SAD)$.

Hay $\left(\widehat{(SCD);(SAD)}\right) = 90^\circ$.

c) Ta có $\left.\begin{matrix} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

$\left.\begin{matrix} \text{Suy ra } BD \perp SC \\ \text{Dựng } OH \perp SC \end{matrix}\right\} \Rightarrow SC \perp (BHD)$.

Do đó, $\left(\widehat{(SBC);(SCD)}\right) = \widehat{BHD}$.

Vì $OH \perp BD$ tại trung điểm O nên ΔBHD cân tại H.

Ta có $OH = OD.cot\widehat{OHD} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}cot\dfrac{\widehat{BHD}}{2}$.

Đặt $SA = x$. Ta có ⊿$OHC \backsim$ ⊿SAC có góc nhọn C chung.

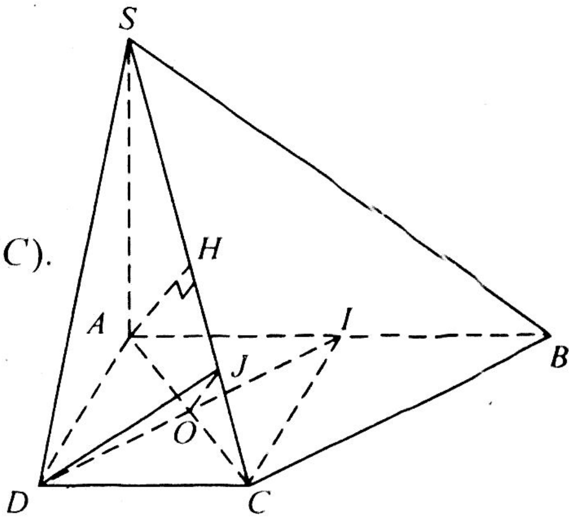
Nên $\dfrac{OH}{OC} = \dfrac{SA}{SC} \Rightarrow OH = \dfrac{OC.SA}{SC} = \dfrac{ax\sqrt{2}}{2\sqrt{2a^2+x^2}}$

Từ đó suy ra $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}cot\dfrac{\widehat{BHD}}{2} = \dfrac{ax\sqrt{2}}{2\sqrt{2a^2+x^2}}$.

$$\Leftrightarrow cot\frac{\widehat{BHD}}{2} = \frac{x}{\sqrt{2a^2+x^2}}$$

Theo bài ra ta có $\widehat{BHD} = 60^0$ nên suy ra

$$cot\,60^0 = \frac{x}{\sqrt{2a^2+x^2}} \Leftrightarrow x = a \text{ hay } SA = a.$$



Bài 7:

a) Học sinh tự làm. Đáp số: 45^0

b) Học sinh tự làm. Đáp số: 60^0

c) Ta có $\left.\begin{array}{l} BC \perp SA \\ BC \perp AC \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAC)$.

$\Rightarrow (SAC) \perp (SBC)$.

Dựng $AH \perp SC$ thì H là trung điểm của SC và $AH = \dfrac{SC}{2} = a$

Gọi O là tâm hình vuông $ADCI$

Ta có $DO \perp (SAC)$.

Dựng $OJ \perp SC$ ta có J là trung điểm của HC và $OJ = \dfrac{AH}{2} = \dfrac{a}{2}$

Khi đó $DJ \perp SC$.

Vậy $\widehat{DJO} = \left(\widehat{(SAC);(SCD)}\right) = \alpha$.

Trong tam giác vuông DOJ ta có:

$$DJ^2 = DO^2 + OJ^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow DJ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

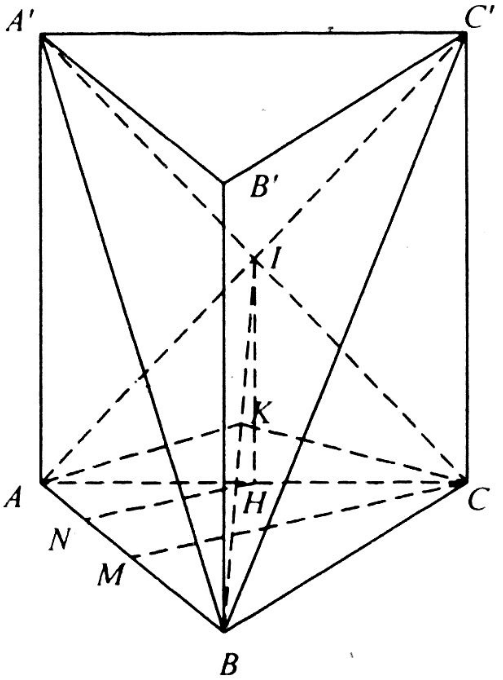
Suy ra $sin\,\alpha = \dfrac{CD}{JD} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

Gọi $\left(\widehat{(SBC);\,(SCD)}\right) = \beta$.

Ta có $\beta = \alpha + 90^{0} \Rightarrow cos\beta = cos\,(\alpha + 90^{o}) = -\,sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$$\Rightarrow \beta = arccos\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \pi - arccos\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Bài 8:



Gọi I là giao điểm của AC' và $A'C$.

Ta có $(ABC') \cap (BCA') = BI$.

$\Delta AIB = BIC$ nên hai đường cao $AK = CK$

Suy ra $(\widehat{(ABC');(BCA')}) = \widehat{AKC}$.

Gọi H, M lần lượt là trung điểm của AC và AB.

Ta có $IH = MH = \dfrac{a}{2}$

Nên ΔIHM vuông cân tại H, $IM = a\sqrt{2}$

Xét tam giác vuông IHB có:

$IB^2 = IH^2 + HB^2 = a^2 \Rightarrow IB = a$

Vậy ΔAIB cân tại B.

Gọi N là trung điểm của AM.

Ta có $HN \,//\, CM \Rightarrow HN \perp AB \Rightarrow IN \perp AB$.

Xét tam giác vuông IHN có:

$$IN^2 = IH^2 + HN^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{16} = \frac{7a^2}{16}$$

$$\Rightarrow AK = IN = \frac{a\sqrt{7}}{4}$$

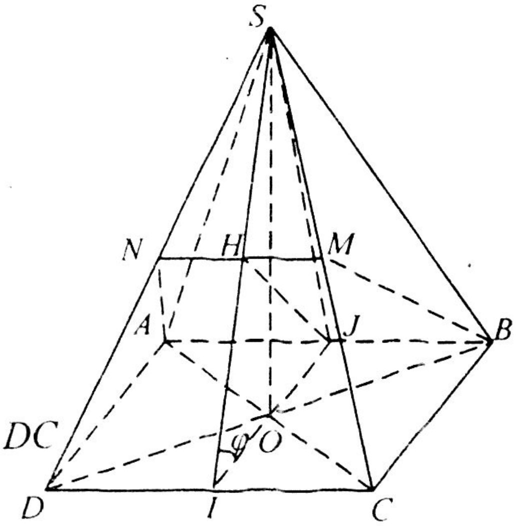
Khi đó $cos\widehat{AKC} = \dfrac{AK^2 + KC^2 - AC^2}{2AK.KC} = -\dfrac{1}{7}$

Suy ra: $sin\widehat{AKC} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{49}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{7}$

Vậy $\widehat{AKC} = arcsin\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$.

Bài 9:

(*) Gọi J là trung điểm của AB.



Ta có $\left.\begin{array}{l} CD \perp IJ \\ CD \perp SO \end{array}\right\} \Rightarrow CD \perp (SIJ)$.

Dựng $JH \perp SI$ tại H.

Ta có $JH \perp CD$ (vì $CD \perp (SIJ)$).

Suy ra $JH \perp (SDC)$.

Vậy $JH \subset \alpha$.

Ta có $CD \,//\, \alpha$.

Nên $\alpha \cap (SCD) = MN$ qua H và $MN \,//\, DC$

(Với $M \in SC$; $N \in SD$).

Vậy thiết diện là hình thang $ABMN$.

(*) $S = \frac{1}{2}(MN + AB).HJ\left(vì\ AB \perp (SIJ)\ \ nên\ AB \perp HJ\right)$

Trong đó, xét trong tam giác IHJ.

$$cos\varphi = \frac{OI}{SI} = \frac{\frac{a}{2}}{SI} \Rightarrow SI = \frac{a}{2cos\varphi}$$

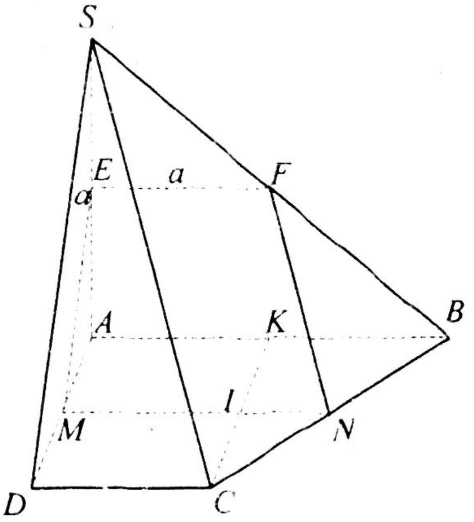
$$HJ = IJ.sin\varphi = asin\varphi$$

$$HI = IJ.cos\varphi = acos\varphi$$

Xét ΔSCD ta có $\frac{MN}{DC} = \frac{SH}{SI}$

$$\Rightarrow MN = \frac{CD.SH}{SI} = CD \cdot \frac{SI.HI}{SI} = a \cdot \frac{\frac{a}{2cos\varphi} - a\,cos\varphi}{\frac{a}{2cos\varphi}}$$

$$= a\left(a - 2cos^2\varphi\right) = a\,cos2\varphi$$



Vậy $S_{ABMN} = \frac{1}{2}.a\,sin\varphi\left(a - a\,cos2\varphi\right)$

$$= \frac{a^2}{2}sin\varphi(1 - cos2\varphi).$$

Bài 10:

a) Ta có $(SAB) \perp (ABCD)$.

$(SAD) \perp (ABCD)$.

$(SAB) \cap (SAD) = SA$.

Suy ra $SA \perp (ABCD)$.

b) Dựng $MN \perp AD$ tại M cắt BC tại N.

Ta có $MN \perp SA$.

Suy ra $MN \perp (SAD) \Rightarrow MN \subset \alpha$.

Vậy $\alpha = (EMN)$.

c) Vì $AB \parallel MN$ nên $AB \parallel \alpha$.

Do đó $\alpha \cap (SAB) = EF \parallel AB$ $(F \in SB)$

Vậy thiết diện là hình thang vuông $MNFE$ tại M, E.

Ta có $S_{MNEF} = \frac{1}{2}(EF + MN).EM$

Trong đó $EF = \frac{AB}{2} = a$

$MN = MI + IN$ với $\frac{IN}{KB} = \frac{CI}{CK} = \frac{DM}{DA} \Rightarrow IN = \frac{a.(a-x)}{a} = a - x$

Vậy $MN = a + a - x = 2a - x$

$$EM = \sqrt{EA^2 + MA^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4x^2}.$$

Vậy $S_{MNFE} = \frac{1}{4}(3a - x)\sqrt{a^2 + 4x^2}$.

§5. KHOẢNG CÁCH

Bài 1: Học sinh tự giải

Đáp số : a) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Bài 2: Học sinh tự giải.

Đáp số: a) $\frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$ b) $\frac{a\sqrt{5}}{5}$ c) $\frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{2b}$.

Bài 3:

a) * Dựng $Ay' \parallel By$. Ta có $AB \perp (xAy')$

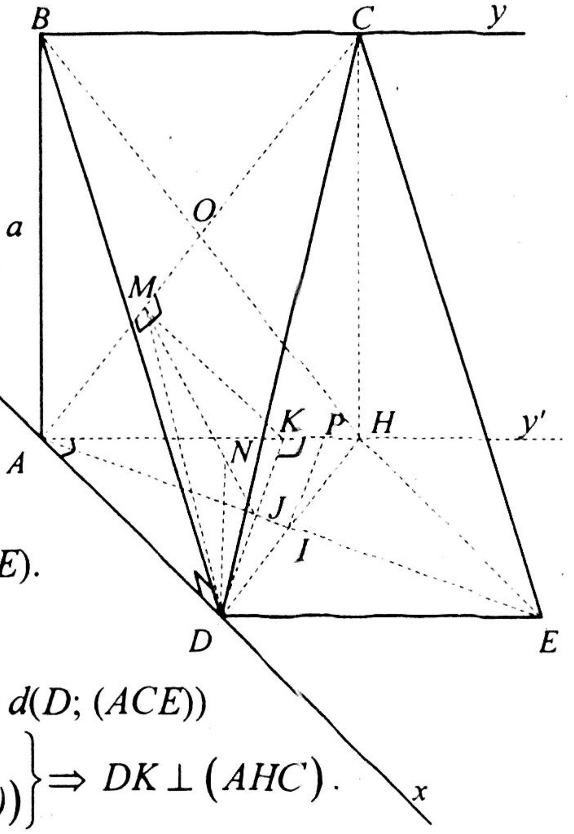
Dựng $CH \perp Ay'$. Khi đó ta có $ABCH$ là hình vuông và $CH \perp (xAy')$

Vì $AD \perp CD$ nên $AD \perp HD$

Hay ΔAHD vuông tại D

và $\widehat{HAD} = 60^0$.

Suy ra:



$$AD = \frac{AH}{2} = \frac{a}{2};$$

$$DH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

* Vì $CH // AB$ nên $CH // (ABD)$

Do đó $d(C, (ABD) = d(H; (ABD))$

$$= HD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

(vì $HD \perp AD$ và $HD \perp AB$

$\Rightarrow HD \perp (ABD)$)

b) Dựng hình bình hành $BCED$.

Khi đó $BD // CE$ suy ra $BD // (ACE)$.

Vậy $d(AC; BD) = d(BD; (ACE)) = d(D; (ACE))$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Dựng } DK \perp AH \\ \text{Ta có } DK \perp CH\left(\text{vì } CH \perp (xAy')\right)\end{array}\right\} \Rightarrow DK \perp \left(AHC'\right).$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Suy ra } DK \perp AC \\ \text{Dựng } KM \perp AC\end{array}\right\} \Rightarrow AC \perp \left(DKM\right) \Rightarrow \left(ACE\right) \perp \left(DKM\right).$$

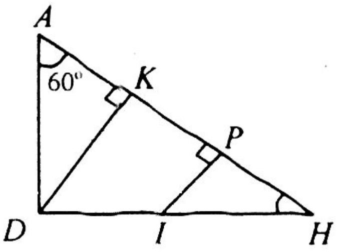
Mà $(ACE) \cap (DKM) = MJ$ với $\{J\} = DK \cap AE$.

Dựng $DN \perp MJ$ thì $DN \perp (ACE)$.

Vậy $d(D; (ACE)) = DN$.

Ta có $DK = \frac{a\sqrt{3}}{4}$; $AK = \frac{a}{4}$.

Dựng $IP // DK$ khi đó



$$IP = \frac{IH}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{8}; \quad PH = \frac{a\sqrt{3}}{4}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{8};$$

$$AP = a - \frac{3a}{8} = \frac{5a}{8}$$

Suy ra $$\frac{JK}{IP} = \frac{AK}{AP} = \frac{\frac{a}{4}}{\frac{5a}{8}} = \frac{2}{5}.$$

Do đó $$JK = \frac{2}{5}IP = \frac{a\sqrt{3}}{20}.$$

Hơn nữa, KM // HO nên $\frac{MK}{OH} = \frac{AK}{AH} = \frac{\frac{a}{4}}{a} = \frac{1}{4}$.

Suy ra $MK = \frac{1}{4}OH = \frac{a\sqrt{2}}{8}$.

$S_{\Delta DMJ} = S_{\Delta DKM} - S_{\Delta JKM} = \frac{1}{2}DK\,.\,MK - \frac{1}{2}JK\,.\,MK = \frac{1}{2}(DK - JK)\,.$
$MK.$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a\sqrt{3}}{4} - \frac{a\sqrt{3}}{20}\right).\frac{a\sqrt{2}}{8} = \frac{a^2\sqrt{6}}{80}$$

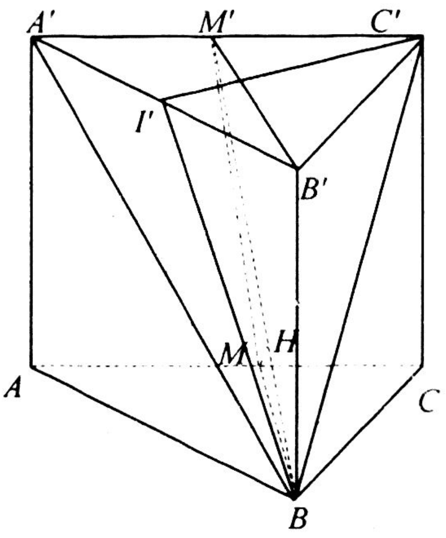
Suy ra $DN = \frac{2S_{\Delta DMJ}}{MJ}$ với $MJ = \sqrt{MK^2 + JK^2} = \frac{a\sqrt{31}}{20\sqrt{2}}$.

Vậy $DN = \frac{2a^2\sqrt{6}}{80}$ x $\frac{20\sqrt{2}}{a\sqrt{31}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{31}} = \frac{a\sqrt{93}}{31}$ hay $d(AC;BD) = \frac{a\sqrt{93}}{31}$.

Bài 4: Học sinh tự giải

Đáp số: a) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ b) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$

Bài 5:



a) Gọi I' là trung điểm của $A'B'$

Ta có $\left.\begin{array}{l} C'I' \perp A'B' \\ C'I' \perp BB' \end{array}\right\} \Rightarrow C'I' \perp (ABB'A')$

Suy ra $(\widehat{BC';(ABB'A')}) = \widehat{C'BI'} = 30^\circ$

$C'I' \perp I'B.$

Do đó $BC' = a\sqrt{3}$

$BI' = \frac{3a}{2}$

$$\Rightarrow BB' = \sqrt{I'B^2 - I'B'^2} = \sqrt{\frac{9a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = a\sqrt{2}.$$

Vậy $AA' = a\sqrt{2}$.

b) Gọi M' là trung điểm của $A'C'$

Ta có $\left.\begin{array}{l} AC \perp BM \\ AC \perp MM' \end{array}\right\} \Rightarrow AC \perp (BB'MM') \Rightarrow A'C' \perp (BB'M'M)$

Dựng $MH \perp BM'$
Ta có $MH \perp A'C'$ $\Big\} \Rightarrow MH \perp (ABC)$.

Vậy $d(M, (BA'C') = MH$

$$\frac{1}{MH^2}=\frac{1}{MM'^2}+\frac{1}{BM^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{\frac{3a^2}{4}}=\frac{11}{6a^2}.$$

Suy ra $MH=\frac{a\sqrt{66}}{11}$ hay $d\left(M;\left(BA'C'\right)\right)=\frac{a\sqrt{66}}{11}$.

Bài 6: Học sinh tự giải.

Đáp số a) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Bài 7: Học sinh tự giải.

Đáp số a) $\frac{2a}{3}$; $\frac{a}{3}$ b) $\frac{4a\sqrt{33}}{33}$.

Bài 8: Học sinh tự giải.

Đáp số a) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. c) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

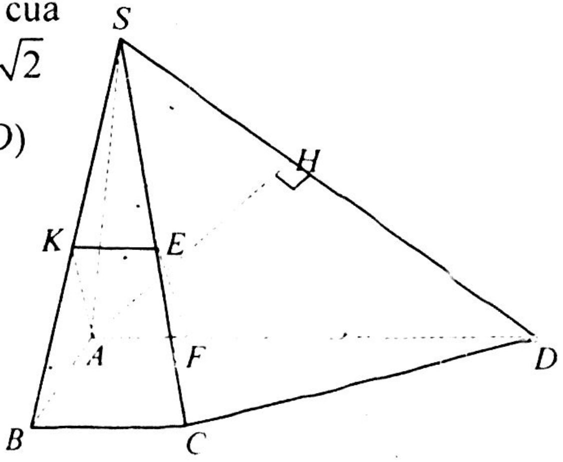
Bài 9:

a) Ta có $AC^2+CD^2=2a^2+7a^2-9a^2=AD^2$.

Suy ra $AC\perp CD$.

Mặt khác $AC\perp SA$.

Vậy AC là đoạn vuông góc chung của SA và CD và $d(SA;CD)=AC=a\sqrt{2}$



b) Ta có $\left.\begin{array}{l}AB\perp AD\\ AB\perp SA\end{array}\right\}\Rightarrow AB\perp(SAD)$

Dựng $AH\perp SD$

Ta có $AH\perp AB$ vì $AB\perp(SAD)$

Vậy AH là đoạn vuông góc chung của AB và SD.

$$d(AB;SD)=AH=\frac{3a\sqrt{2}}{11}$$

c) Dựng $AK\perp SB$ $(K\in SB)$

$KE\ //\ BC$ $(E\in SC)$

$EF\ //\ AK$ $(F\in AD)$

$\left.\begin{array}{l}\text{Ta có } BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp AK\\ \text{Mà } \qquad SB\perp AK\end{array}\right\}\Rightarrow AK\perp(SBC).$

Vì $EF\ //\ AK$ nên $EF\perp(SBC)\Rightarrow EF\perp SC$.

Mặt khác $AD\perp(SAB)\Rightarrow AD\perp AK$.

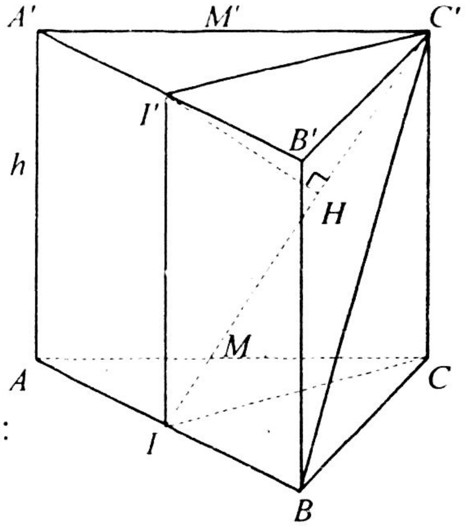
Mà $AK\ //\ EF$ nên $AD\perp EF$.

Vậy EF là đoạn vuông góc chung của 2 đường thẳng SC và AD

$$d(AD; SC) = EF = AK = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Bài 10:

Gọi I, I' là trung điểm của AB, $A'B'$.



Ta có $A'B' \,//\, BI \Rightarrow A'B' \,//\, (BIC')$

Vậy $d(A'B', BC') = d(A'B', (BIC'))$
$= d(I', (BIC'))$.

Dựng $I'H \perp C'I$.

Ta có $BI \perp IJ$

$BI \perp C'I'$ (vì $C'I' \perp (ABB'A')$)

Suy ra $BI \perp (C'I'I) \Rightarrow BI \perp I'H$

Từ đó suy ra $I'H \perp (BIC')$ hay $I'H = d$.

Mặt khác, gọi cạnh đáy lăng trụ là a ta có:

$$\frac{1}{I'H^2} = \frac{1}{I'C'^2} + \frac{1}{I'I^2}$$

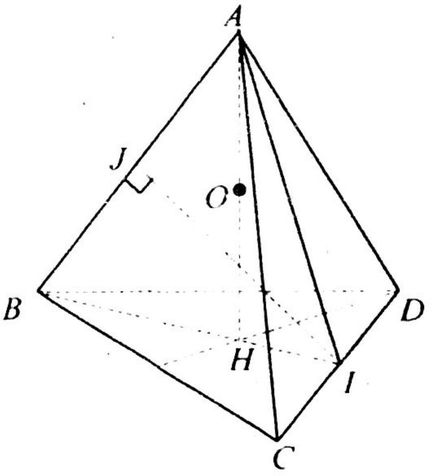
$$\Leftrightarrow \frac{1}{d^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{h^2} \Leftrightarrow a^2 = \frac{4h^2d^2}{3\left(h^2 - d^2\right)}.$$

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG III:

Bài 1:

a)* Gọi I là trung điểm của CD, J là trung điểm của AB.

$$\text{Ta có } \left.\begin{matrix} CD \perp AH \\ CD \perp AI \end{matrix}\right\} \Rightarrow CD \perp (AIB) \Rightarrow CD \perp AB.$$



* Ta có $CD \perp (AIB) \Rightarrow CD \perp IJ$.

Mặt khác ΔAIB cân tại I nên $IJ \perp AB$.

Vậy $d\left(AB; CD\right) = IJ = \sqrt{BI^2 - BJ^2}$.

$$= \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

b) Ta có $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

$$OB^2 = OH^2 + HB^2 = \frac{a^2}{6} + \frac{a^2}{3} = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow OB = \frac{a\sqrt{2}}{2} = OC = OD$$

Khi đó $OB^2 + OC^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = a^2 = BC^2$.

Suy ra $OB \perp OC$.

Tương tự $OC \perp OD$.

Vậy OB, OC, OD từng đôi một vuông góc với nhau.

c) Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$. Khi đó:

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{O}$ (học sinh tự chứng minh).

Suy ra $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$

$$= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 + \overrightarrow{MD}^2$$

$$= \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD}\right)^2$$

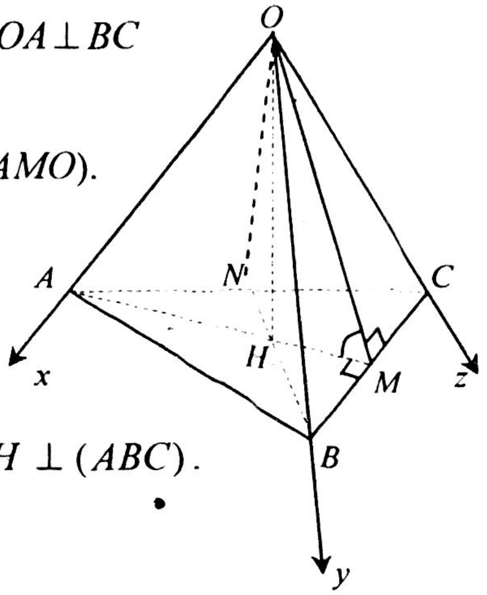
$$= 4\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 + \overrightarrow{GD}^2 + 2\overrightarrow{MG}^2\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}\right)$$

$$= 4\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 + \overrightarrow{GD}^2 \geq GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức đã cho có giá trị

$GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$ khi $4\overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow M = 6$.

Bài 2:



a) Ta có $\left.\begin{matrix} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{matrix}\right\} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC$

Mặt khác, $AM \perp BC$

Suy ra $BC \perp (AMO)$, do đó $(ABC) \perp (AMO)$.

Tương tự $(ABC) \perp (BNO)$.

b) Vì $BC \perp (AMO)$ nên $BC \perp OH$.

Tương tự $AC \perp (BNO)$ nên $AC \perp OH$.

Suy ra $OH \perp (ABC)$.

Hoặc $\left.\begin{matrix} (AMO) \perp (ABC) \\ (BNO) \perp (ABC) \\ (AMO) \cap (BNO) = OH \end{matrix}\right\} \Rightarrow OH \perp (ABC)$.

c) Ta có $OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp OM$.

Do đó trong tam giác vuông AOM:

Ta có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OM^2}$

Mặt khác, trong tam giác vuông BOC; $OM \perp BC$

$$\frac{1}{OM^2}=\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$$

Từ đó suy ra $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$.

d) Vì $OM\perp BC$; $AM\perp BC$ nên $\alpha=\widehat{OMA}$.

Ta có trong tam giác vuông AOM.

$$cos\alpha=\frac{OM}{AM}\Rightarrow cos^2\alpha=\frac{OM^2}{AM^2}$$

Trong đó: $\frac{1}{OM^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{b^2+c^2}{b^2c^2}\Rightarrow OM^2=\frac{b^2c^2}{b^2+c^2}$

$$AM^2=AO^2+OM^2=a^2+\frac{b^2c^2}{b^2+c^2}=\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{b^2+c^2}$$

Vậy $cos^2\alpha=\frac{b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$

Tương tự $cos^2\beta=\frac{a^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$

$$cos^2\gamma=\frac{a^2b^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$

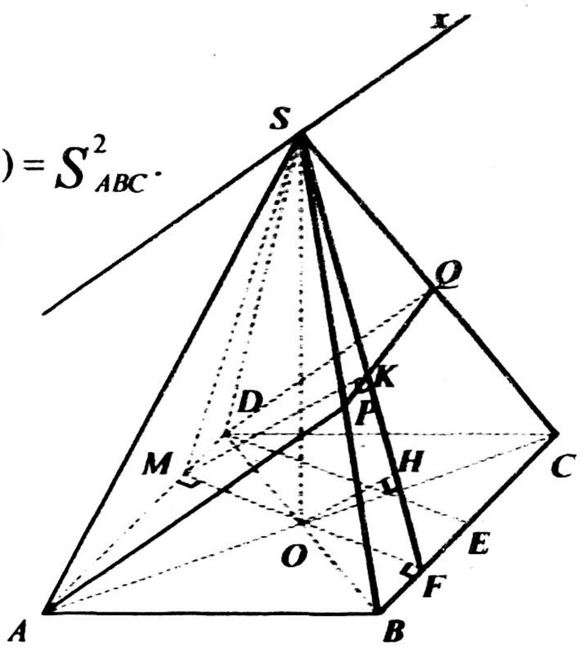
Suy ra $cos^2\alpha+cos^2\beta+cos^2\gamma=1$.

e) Áp dụng công thức diện tích hình chiếu.

$$S_{OBC}=S_{ABC}.cos\alpha$$
$$S_{OAC}=S_{ABC}.cos\beta$$
$$S_{OAB}=S_{ABC}.cos\gamma$$

Suy ra $S^2_{OBC}+S^2_{OAC}+S^2_{OAB}$

$$=S^2_{ABC}(cos^2\alpha+cos^2\beta+cos^2\gamma)=S^2_{ABC}.$$



Bài 3: a) Ta có ΔBCD đều nên $DE\perp BC$.

Mà $OF\,//\,DE$ nên $OF\perp BC$.

Mặt khác $SO\perp BC$.

Suy ra $BC\perp(SOF)$.

Do đó $(SBC)\perp(SOE)$.

b) Dựng $OH\perp SF$ trong mp(SOF)

Ta có $OH\perp BC$ (vì $BC\perp(SOF)$).

Suy ra $OH\perp(SBC)$.

Hay $d(O;(SBC)) = OH$.

Ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OF^2}$

$$= \frac{1}{\left(\frac{3a}{4}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2}$$

$$= \frac{16}{9a^2} + \frac{16}{3a^2} = \frac{64}{9a^2} \Rightarrow OH = \frac{3a}{8}$$

Ta có $AD \,//\, BC \Rightarrow AD \,//\, (SBC)$.

Gọi $\{M\} = OF \cap AD$.

Do đó $d(A;(SBC)) = d(AD;(SBC)) = d(M,(SBC))$

Dựng $MK \perp SF$, ta có:

$$d(A;(SBC)) = d(M;(SBC)) = MK = 2OH = \frac{3a}{4}.$$

c) Vì $AD \,//\, (SBC)$ nên $d(AD;SB) = d(AD;(SBC)) = d(A;(SBC)) = \dfrac{3a}{4}$.

d) Vì $BC \,//\, AD$ nên $(SBC) \cap (SAD) = Sx \,//\, BC \,//\, AD$.

Ta có $BC \perp (SOF)$ nên $BC \perp SF$. Suy ra $Sx \perp SF$.

$AD \perp (SOF)$ nên $AD \perp SM$. Suy ra $Sx \perp SM$.

Do đó $\left(\widehat{(SBC);(SAD)}\right) = \widehat{MSF} = 2\widehat{OSF}$.

$$\text{Trong đó } \tan\widehat{OSF} = \frac{OF}{SO} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{4}}{\frac{3a}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{OSF} = 30^\circ.$$

Do đó $\left(\widehat{(SBC);(SAD)}\right) = 60^\circ$.

e) Ta có $MK \perp (SBC)$.

Mặt phẳng α chứa AD và $\alpha \perp (SBC)$.

Suy ra $MK \subset \alpha$. Vậy $\alpha \equiv (AKD)$.

Vì $BC \,//\, AD$ nên $BC \,//\, \alpha$.

Vậy α cắt mặt phẳng (SBC) theo giao tuyến qua K cắt SB, SC lần lượt tại P, Q.

Do đó thiết diện là hình thang $ADPQ$.

$$S_{ADPQ} = \frac{1}{2}(AD + PQ).MK$$

Trong đó: $OF = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$;

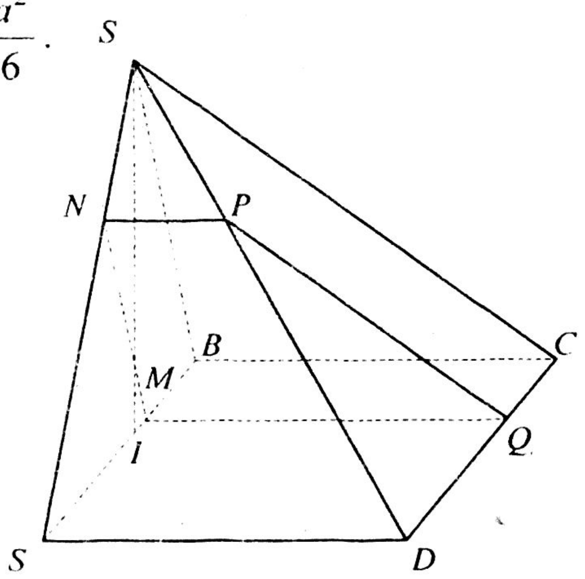
$$MF = 2OF = \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

$$SF = \sqrt{SO^2 + OF^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} = SM$$

$$SK = \sqrt{SM^2 - MK^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{9a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

Suy ra $\frac{PQ}{BC} = \frac{SK}{SF} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{4}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow PQ = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$.

Vậy $S_{ADPQ} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right)\cdot\frac{3a}{4} = \frac{9a^2}{16}$.



Bài 4:

a) Ta có $(SAB) \perp (ABCD)$.

$(SAB) \cap (ABCD) = AB$.

$SI \perp AB$; $SI \subset (SAB)$

Suy ra $SI \perp (ABCD)$.

b) Ta có $AD \perp AB$.

$AD \perp SI$ (vì $SI \perp (ABCD)$).

Suy ra $AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp SA$.

Hay ΔSAD vuông tại A.

Tương tự ΔSBC vuông tại B.

c)* Ta có $AD \perp (SAB) \Rightarrow (SAD) \perp (SAB)$.

Tương tự $(SBC) \perp (SAB)$.

* Ta có $AD \,//\, BC$ nên:

$(SAD) \cap (SBC) = Sx \,//\, AD \,//\, BC$.

Vì $AD \perp SA$ nên $SA \perp Sx$.

$BC \perp SB$ nên $SB \perp Sx$.

Do đó $\left(\widehat{(SAD),(SBC)}\right) = \widehat{ASB} = 60^\circ$.

d)* Ta có $NP \,//\, MQ \,//\, AD$.

Mặt khác, $\left.\begin{matrix} MQ \,//\, BC \\ BC \perp (SAB) \end{matrix}\right\} \Rightarrow MQ \perp (SAB)$.

Suy ra $MQ \perp MN$.

Hay $MNPQ$ là hình thang vuông.

* $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MQ + NP).MN$

Trong đó $MQ = a$; $MN = AM = AN = x$

$NP = NS = a - x$.

Vậy $S_{MNPQ} = \frac{(2a - x)x}{2}$

* Ta có $S = S_{MNPQ} \le \frac{1}{2}\left(\frac{2a - x + x}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$

Do đó, $S_{max} = \frac{a^2}{2}$ khi $2a - x = x \Leftrightarrow x = a$.

Bài 5:

a) Ta có ΔSAC đều nên $SO \perp AC$.

ΔSBD đều nên $SO \perp BD$.

Suy ra $SO \perp (ABCD)$.

b) Ta có, $\left.\begin{matrix} BC \perp IJ \\ BC \perp SO \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SIJ)$.

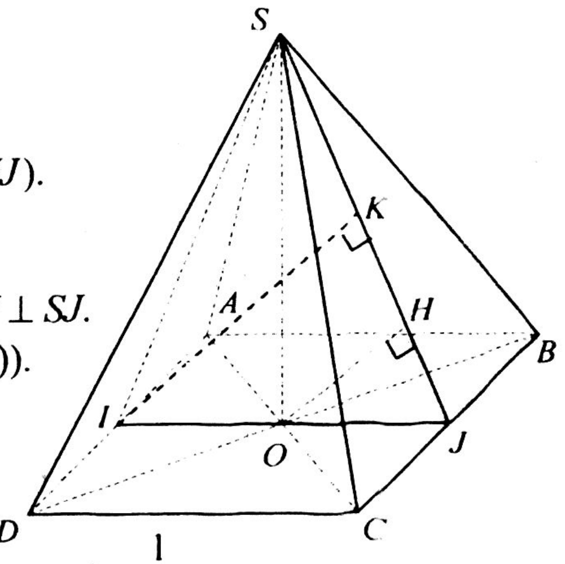
Suy ra $(SIJ) \perp (SBC)$.

c) Trong mặt phẳng (SIJ) dựng $OH \perp SJ$.

Khi đó $OH \perp BC$ (vì $BC \perp (SIJ)$).

Suy ra $OH \perp (SBC)$

hay $d(O, (SBC)) = OH$.



$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OJ^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}.\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{3a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{14}{3a^2}$$

$$\Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{14}} = \frac{a\sqrt{42}}{14}$$

Vậy $d\big(O,(SBC)\big) = \frac{a\sqrt{42}}{14}$.

d)* Ta có $SO \perp (ABCD)$ nên OA là hình chiếu của SA trên mp$(ABCD)$.

Vậy $(\widehat{SA,(ABCD)}) = \widehat{SAO} = 60^\circ$ (vì tam giác SAC đều cạnh bằng $a\sqrt{2}$)

Tương tự đối với các cạnh còn lại.

* Ta có $(SAD) \cap (ABCD) = AD$.

$SI \perp AC$.

$IJ \perp AD$.

Suy ra $\widehat{((SAD); (ABCD))} = \widehat{SIO}$

$$\tan\widehat{SIO} = \frac{SO}{OI} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{6}$$

Vậy $\left(\widehat{(SAD); (ABCD)}\right) = \arctan\sqrt{6}$.

Tương tự đối với các mặt còn lại.

e) Vì $AD \parallel BC$ nên $AD \parallel (SBC)$.

Suy ra : $d(AD; SB) = d(AD; (SBC)) = d(I, (SBC))$

$$= IK = 2OH = \frac{a\sqrt{42}}{7}$$ (Với $IK \perp SJ$).

f) Ta có $BC \perp (SIJ)$ và $SI \subset \alpha$; $\alpha \perp BC$.

Suy ra $\alpha \equiv (SIJ)$ hay thiết diện cửa hình chóp tạo bởi α là ΔSIJ.

$$S_{SIJ} = \frac{1}{2}SO.IJ = \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{6}}{2}\cdot a = \frac{a^2\sqrt{6}}{4}.$$

B. PHẦN BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Đáp án

Bài 1:	D	Bài 14:	
Bài 2:	B	a.	A
Bài 3:	A	b.	B
Bài 4:	C	Bài 15:	A
Bài 5:	C	Bài 16:	B
Bài 6:	D	Bài 17:	C
Bài 7:	C	Bài 18:	
Bài 8:	D	a.	A
Bài 9:	A	b.	B
Bài 10:	C		

Bài 11: C

Bài 12: D

Bài 13: D

Bài 19:

a. B

b. C

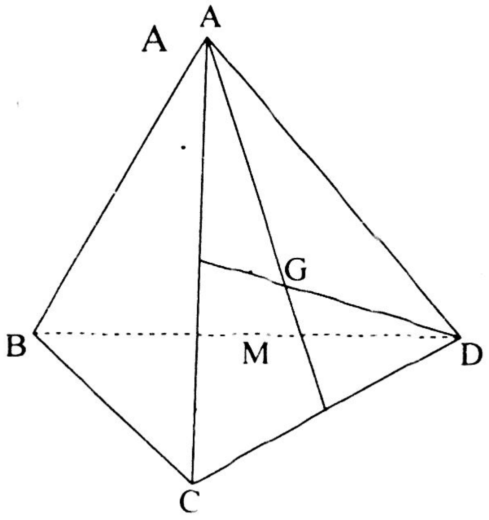
Bài 20:

a. B

b. A

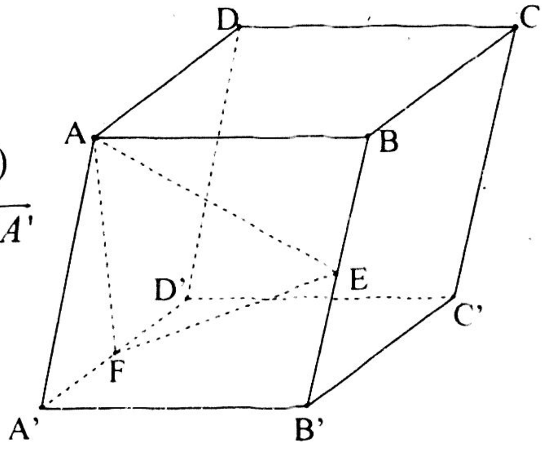
Hướng dẫn giải

Bài 4.



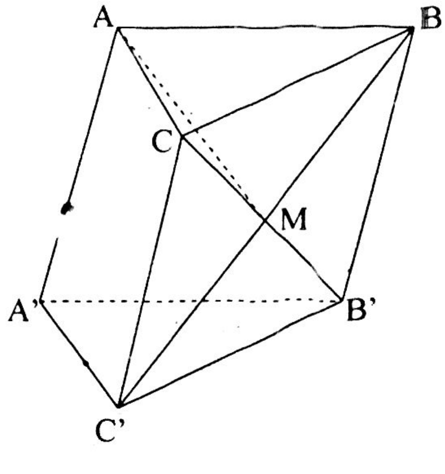
$$Ta\ có\ \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{BG} - \overrightarrow{BM}$$
$$= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}\right) - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$$
$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{6}\overrightarrow{BD}.$$

Bài 5.



$$Ta\ có\ \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE}$$
$$= (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'F}) - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE})$$
$$= \overrightarrow{AA'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$$
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.$$

Bài 6.



$$Ta\ có\ \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA}$$
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC'} - \overrightarrow{BA}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}\right) - \overrightarrow{BA}$$
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{BA}.$$

Bài 7.

Ta có $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ *vì* $\Delta\ SAB$ *đều*

$SJ = \frac{a}{2}$ *vì* $\Delta\ SCD$ *vuông cân.*

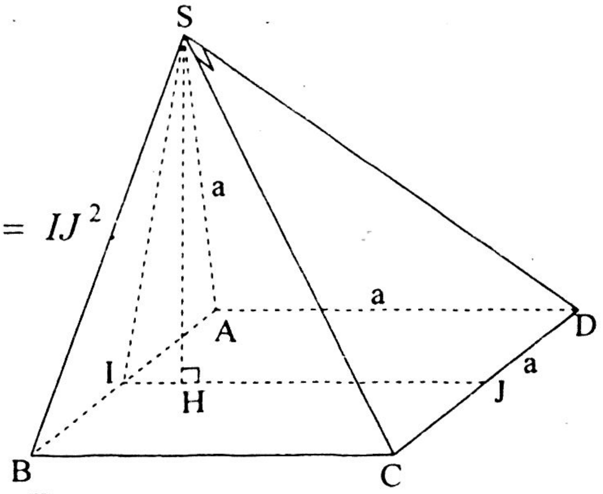
Suy ra $SI^2 + SJ^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = a^2 = IJ^2$

Vậy $SI \perp SJ$.

Trong $\Delta\ SIJ$ *ta có:*

$S_{\Delta SIJ} = \frac{1}{2} SH\,.\,IJ = \frac{1}{2} SI\,.\,SJ.$

Suy ra $SH = \frac{SI\,.\,SJ}{IJ} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$



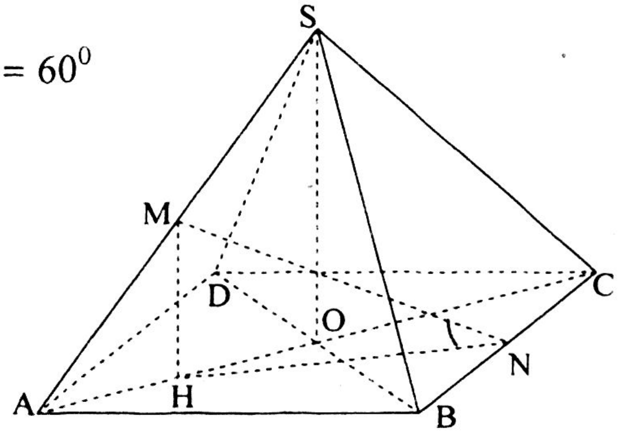
Bài 8. Gọi O là tâm của hình vuông ABCD.

Ta có SO $\perp$ (ABCD)

Trong mặt phẳng (SAC) dựng MH // SO

Suy ra MH $\perp$ (ABCD).

Suy ra $\left(\widehat{MN;(ABCD)}\right) = \widehat{MNH} = 60^0$



Xét Δ HCN có CN $= \frac{a}{2}$

$CH = \frac{3}{4}a\sqrt{2} = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$

$\widehat{NCH} = 45^0.$

$$Suy\ ra\ HN^2 = HC^2 + CN^2 - 2HC.CN.\cos 45^0$$
$$= \frac{9a^2}{8} + \frac{a^2}{4} - 2\frac{3a\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \frac{9a^2}{8} + \frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{4} = \frac{5a^2}{8}$$

$\Rightarrow HN = \frac{a\sqrt{10}}{4}$ *Vậy* $MN = \frac{HN}{\cos 60^0} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$

Bài 9.

Trong mặt phẳng (SAD), kẻ AH // SD

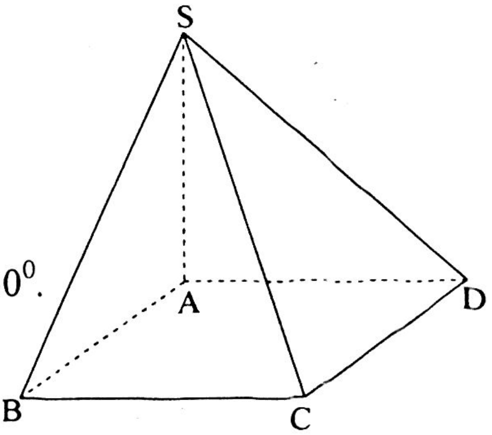
$Ta\ có\ \left(SCD\right) \cap \left(ABCD\right) = CD$

$\quad CD \perp SD\ \ (vì\ CD \perp (SAD))$

$\quad CD \perp AD$

$Suy\ ra\ \left(\widehat{\left(SCD\right);\ \left(ABCD\right)}\right) = \widehat{SDA} = \alpha.$

$$Vậy\ \tan\alpha = \frac{SA}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30^0.$$



Bài 10.

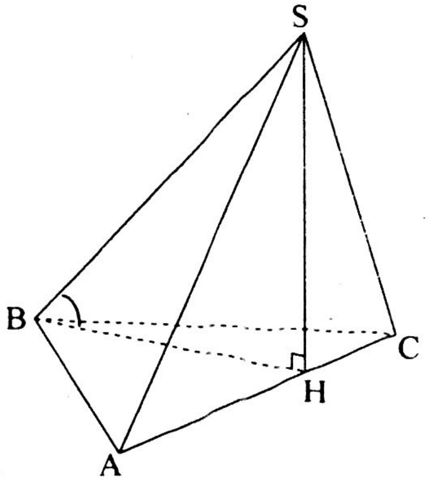
Vì SH $\perp$ (ABC) $\Rightarrow \widehat{SBH} = \alpha$ là góc giữa SB và mặt phẳng (ABC).

$$Ta\ có\ AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} - a\sqrt{3}$$

$$SH^2 = HA.HC = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{2a^2}{3}$$

$$\Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$BH = \sqrt{AB^2 + AH^2} = \sqrt{a^2 + \frac{4a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{21}}{3}$$



$$Vậy\ \tan\alpha = \frac{SH}{BH} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{\frac{a\sqrt{21}}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{14}}{7}.$$

Bài 11.

Ta có B'O $\perp$ (ABCD).

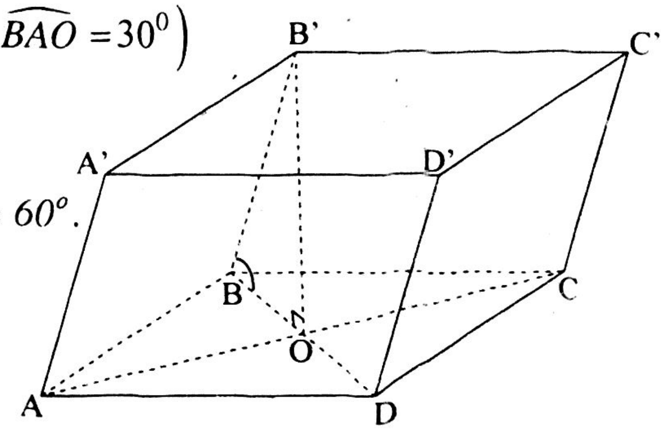
Suy ra BO là hình chiếu của BB' lên mặt phẳng (ABCD).

Do đó $\left(\widehat{BB';\left(ABCD\right)}\right) = \widehat{B'BO} = \alpha$.

$$Ta\ có\ BO = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}\left(vì\ \Delta AOB\ có\ \widehat{BAO} = 30^0\right)$$

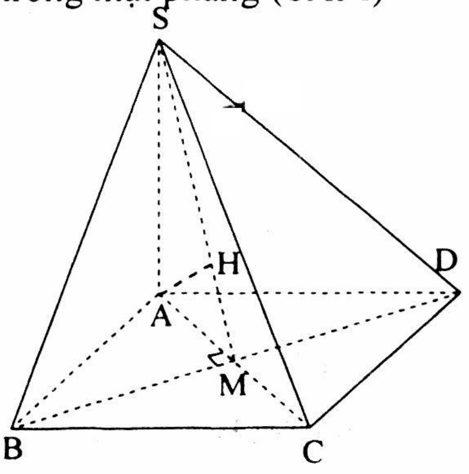
Khi đó

$$\cos\alpha = \frac{BO}{BB'} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}.\ Vậy\ \alpha = 60^o.$$



Bài 12.

Trong mặt phẳng(ABCD), dựng AM ⊥ BD; trong mặt phẳng (SAM) dựng AH ⊥ SM.



$$\text{Khi đó}\quad \left.\begin{array}{l} BD \perp SA \\ BD \perp AM \end{array}\right\} \Rightarrow BD \perp (SAM)$$

$$\begin{array}{l} \text{Suy ra} \\ \text{Mặt khác} \end{array}\quad \left.\begin{array}{l} BD \perp AH \\ SM \perp AH \end{array}\right\} \Rightarrow AH \perp (SBD)$$

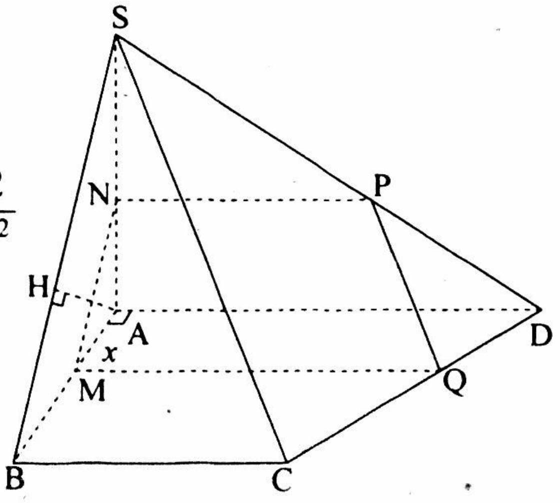
$$\text{Vậy } d((A,(SBD)) = AH.$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{5}{4a^2}$$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{5}{4a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{6}{4a^2}$$

$$\text{Suy ra } AH^2 = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow d\left(A;(SBD)\right) = AH = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Bài 14.



$$a.\ \text{Vì}\quad \left.\begin{array}{l} AD \perp SA \\ AD \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow AD \perp (SAB)$$

Dựng $AH \perp SB$ *thì* $AH \perp AD$

$$d(AD;SB) = AH$$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{2}{a^2}$$

$$\Rightarrow AH^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow AH = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

b. Dựng MQ ⊥ AB (Q ∈ CD).

Ta có MQ ⊥ SA.

Suy ra MQ ⊥ (SAB) ⇒ MQ ⊂ α hay α = (MNQ).

Vì AD // MQ nên α // AD.

Do đó α ∩ (SAB) = NP // AD (P ∈ SD).

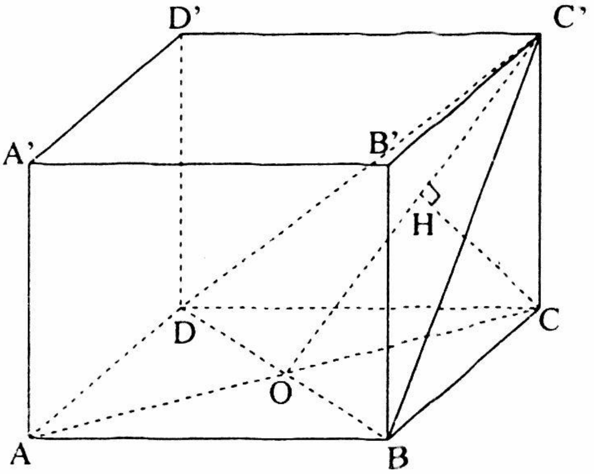
Vậy thiết diện là hình thang vuông MNPQ.

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MQ+NP).MN \text{ với } MN = \frac{AD}{2} = a$$

$$MQ = a + a - x = 2a - x$$

$$MN = \sqrt{AN^2 + AM^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2} = \frac{\sqrt{a^2 + 4x^2}}{2}$$

$$\text{Suy ra } S_{MNPQ} = \frac{1}{4}(3a - x)\sqrt{a^2 + 4x^2}.$$



Bài 15. Gọi O là tâm hình vuông.

Ta có AC ⊥ BD.

CC' ⊥ BD (vì CC' ⊥ (ABCD))

Suy ra BD ⊥ (ACC'A').

Dựng CH ⊥ C'O

trong mặt phẳng (ACC'A')

Mà CH ⊥ DB.

Vậy CH ⊥ (BDC').

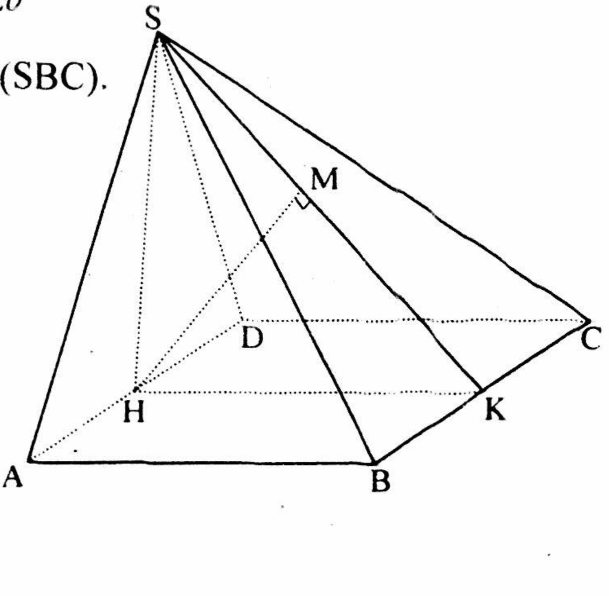
Hay d (C, (BDC')) = CH:

$$\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{CC'^2} + \frac{1}{OC^2}$$

$$= \frac{1}{b^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{2}{a^2}$$

$$= \frac{a^2 + 2b^2}{a^2b^2}$$

$$\text{Do đó } d\left(C, \left(BDC'\right)\right) = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + 2b^2}}.$$



Bài 16. Ta có AD // BC ⇒ AD // (SBC).

Vậy d(AD; SB) = d(AD; (SBC)) = d(H; (SBC))

Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AD; BC

Ta có HK ⊥ BC

$SH \perp AD \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Suy ra $SH \perp BC$.

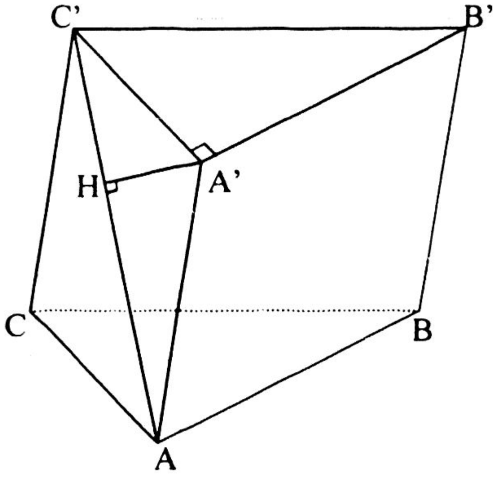
Vậy $BC \perp (SHK)$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Dựng } HM \perp SK \\ \text{Suy ra } HM \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow HM \perp (SBC)$$

$$\text{Vậy } d(AD;\ SB) = HM$$

$$\frac{1}{HM^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3a^2}$$

$$\Rightarrow d(AD;\ SB) = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$



Bài 17.

Ta có A'B' ⊥ A'C'

A'B' ⊥ A A' (vì A A' ⊥ (A'B'C'))

Suy ra A'B'⊥ (ACC'A').

Dựng A'H ⊥AC'.

Khi đó d(A'B'; AC') = A'H

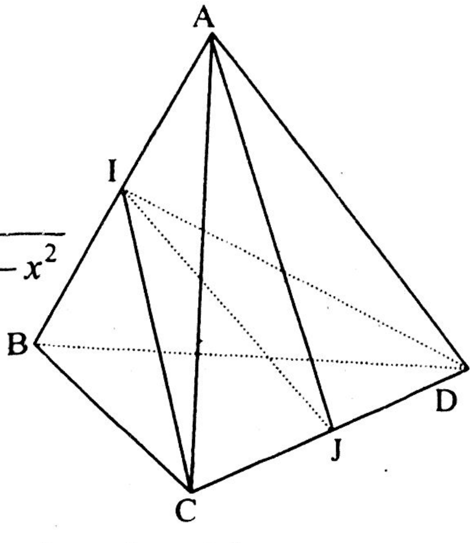
$$\frac{1}{A'H^2} = \frac{1}{A'C'^2} + \frac{1}{AA'^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

$$= \frac{b^2 + c^2}{b^2c^2} \Rightarrow A'H = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}} = d\left((A'B';\ AC'\right).$$

Bài 18.

a. ta có Δ JAB cân tại J nên AB // IJ

Δ ICD cân tại I nên CD // IJ



$$AJ \perp CD \text{ nên } AJ = \sqrt{AC^2 - CJ^2} = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\text{Mặt khác, } (ACD) \cap (BCD) = CD$$

$$(ACD) \perp (BCD)$$

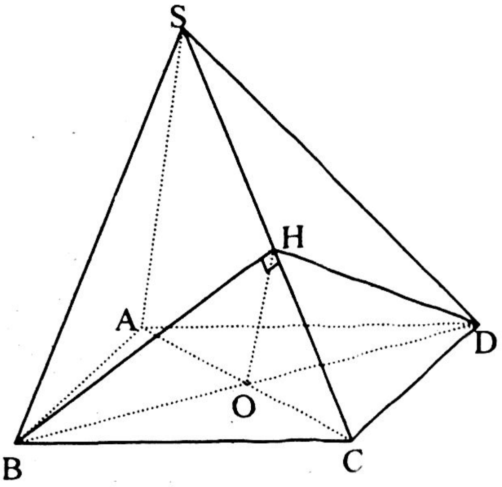
$$AJ \perp CD$$

Suy ra AJ ⊥ (BCD) ⇒ AJ ⊥ BJ hay Δ AJB vuông cân tại J.

Do đó $AB = AJ\sqrt{2} = \sqrt{2(a^2 - x^2)}$.

Mà IJ là trung tuyến nên IJ = $\dfrac{AB}{2} = \dfrac{\sqrt{2(a^2 - x^2)}}{2}$

$$b.\ \text{Ta có}\ \left.\begin{array}{l}(ABC) \cap (ABD) = AB \\ DI \perp AB \\ CI \perp AB\end{array}\right\} \Rightarrow \left(\widehat{(ABC);(ABD)}\right) = \widehat{CID}$$



$(ABC) \perp (ABD) \Rightarrow DI \perp CI$

$\Leftrightarrow IJ = \dfrac{1}{2}CD$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2\left(a^2 - x^2\right)}}{2} = \dfrac{1}{2}.2x$

$\Leftrightarrow 2\left(a^2 - x^2\right) = 4x^2$

$\Leftrightarrow 6x^2 = 2a^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Bài 19.

a. Trong mặt phẳng (SAC) dựng OH ⊥SC.

$$\text{Ta có}\ \left.\begin{array}{l}BD \perp AC \\ BD \perp SA\end{array}\right\} \Rightarrow BD \perp (SAC).$$

Suy ra $BD \perp SC$.
Vậy $SC \perp (BHD)$.
Do đó $\left(\widehat{(SBC);(SCD)}\right) = \widehat{BHD}$.
Nếu là góc nhọn hoặc bù với nó nếu là góc tù.
Ta có $BC \perp (SAB)$ *nên* $BC \perp SB$.

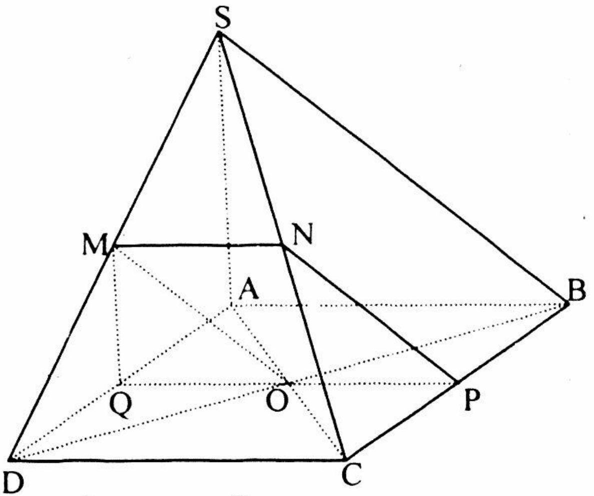
Vậy $\dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{BC^2} + \dfrac{1}{SB^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{2a^2} = \dfrac{3}{2a^2} \Rightarrow BH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Tương tự DH = $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

Suy ra $\cos \widehat{BHD} = \dfrac{BH^2 + DH^2 - BD^2}{2.BH.DH} = \dfrac{1}{2}$ *vậy* $\widehat{BDH} = 120^o$.

Do đó $\left(\widehat{(SBC);(SCD)}\right) = 60^0$.

b. Trong mặt phẳng (SAD) dựng MQ // SA (Q∈AD).



Suy ra MQ ⊥ (ABCD).

Vậy MQ ⊂ α hay α ≡ (MQO).

Ta có DC // α nên

$\alpha \cap (ABCD)$ = QP // DC (Q ∈ BC)

$\alpha \cap (SCD)$ = MN // DC (N ∈ SC).

Vậy thiết diện là hình thang vuông MNPQ

$$S_{MNPQ}=\frac{1}{2}(MN+PQ).MQ=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}+a\right).\frac{a}{2}=\frac{3a^2}{8}$$

Bài 20.

a. Ta có BC ⊥ CD.

$$\left.\begin{matrix}BC\perp AB\\ BC\perp SA\end{matrix}\right\}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp SB.$$

Vậy $d(SB;CD)=BC=a.$

b. Dựng trong mặt phẳng (SAB) AH ⊥ SB

Ta có AH ⊥ BC vì BC ⊥ (SAB).

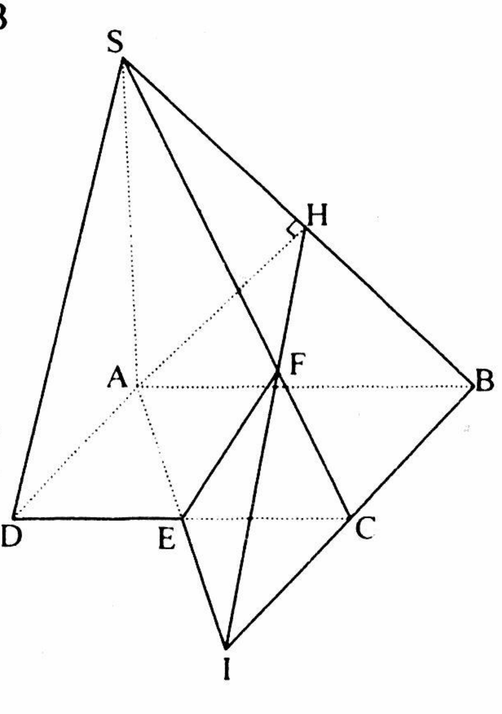
Suy ra AH ⊥ (SBC) ⇒ AH ⊂ β.

Vậy β ≡ (AHE).

Kéo dài AE cắt BC tại I.

Nối IH cắt SC tại F.

Khi đó thiết diện cần tìm là tứ giác AHFE.



$$S_{AHFE}=S_{AHI}-S_{EIF}$$

$$=\frac{1}{2}AH.HI-\frac{1}{2}IE.IF.\sin\widehat{EIF}$$

$$=\frac{1}{2}AH.HI-\frac{1}{2}IE.IF.\frac{AH}{AI}$$

Trong đó

$$AH=\frac{1}{2}SB=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$AE=\sqrt{AD^2+DE^2}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$CE = \frac{1}{2}AB \Rightarrow IE = AE = \frac{a\sqrt{5}}{2}$; $AI = 2AE = 2\sqrt{5}$

$HI = \sqrt{AI^2 - AH^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$

$IF = \frac{2}{3}IH = a\sqrt{2}.$

Vậy $S_{AEFH} = \frac{a^2}{2}.$